Kuželosečky a kvadriky

Ilja Černý

Třetí, upravené a doplněné vydání

Obsah

Sazba systémem $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX, obrázky Mathematica 5.2

Stran 140, obrázků 95

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
na PF TUL, červen 2000

Univerzita Karlova, květen 2012

O autorovi

Prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc., studoval v letech 1948 – 1952 matematiku (zaměřenou na matematickou analýzu) na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze; krátce po jeho absolutoriu se tato fakulta rozdělila a I. Černý tak část své aspirantury absolvoval již na matematicko - fyzikální fakultě univerzity Karlovy (MFF UK). Po tříleté aspirantuře se I. Černý se stal postupně odborným asistentem, v r. 1965 docentem a v r. 1989 profesorem. V r. 1957 získal vědeckou hodnost CSc., v r. 1988 hodnost DrSc. V letech 1962 – 1966 zastupoval vedoucího katedry aplikované matematiky, který v té době působil na Humboldtově univerzitě v Berlíně, v letech 1966 – 1976 byl vedoucím katedry základů matematické analýzy, v letech 1966 až 1971 vykonával funkci proděkana pro studijní záležitosti. Dlouhá léta byl členem vědecké rady MFF UK, 25 let členem redakční rady Časopisu pro pěstování matematiky. Za svou práci byl dvakrát vyznamenán fakultou, jednou univerzitou Karlovou. Po odchodu do důchodu v r. 1995 působil ještě 5 let na Technické univerzitě v Liberci, kde se stal garantem pro obor matematická analýza.

Největší vliv na zaměření jeho práce měl vynikající pedagog, akademik a profesor Vojtěch Jarník, z mladších matematiků pak prof. Jan Mařík. Hlavním oborem jeho vědeckého i pedagogického zájmu je klasická analýza v reálném i komplexním oboru, i když přednášel a vedl semináře i z jiných oborů, jako je např. teorie množin nebo topologie. V Liberci mu byla ve školním roce 1999/2000 svěřena propedeutika, v níž studenty seminární formou seznamoval s lineárními, bilineárními a kvadratickými formami a jejich geometrickými aplikacemi.

Ve druhé polovině padesátých let I. Černý inicioval reformu výkladu integrálního počtu, která umožnila vykládat Lebesgueův integrál již ve 4. semestru. V dalším letech se snažil reformovat komplexní analýzu tak, aby se i potřebná tvrzení z topologie roviny staly její součástí a aby se tak tato část analýzy stala tak exaktní jako její reálná sestra. Je autorem patrně nejkratšího přímého důkazu Cauchyho věty (základní věty celé komplexní analýzy), věnoval se studiu (víceznačných) analytických funkcí a hraničních vlastností konformních zobrazení, což má svůj význam např. v aplikacích na rovinná vektorová pole.

I. Černý své reformní úsilí vždy podporoval vytvořením příslušných učebních pomůcek. Kromě skript z reálné i komplexní analýzy, která se dočkala několika vydání, napsal rozsáhlou monografii „Analýza v komplexním oboru“ (1983), která ve stručnější podobě vyšla v nakladatelství Horwood v Londýně pod titulem „Foundations of Analysis in the Complex Domain“ (1992). Reálné analýze jsou věnovány knížky „Differential and Integral Calculus of One Real Variable“ (1998, spoluautor doc. M. Rokyta z MFF UK) a „Úvod do inteligentní kalkulu 1 a 2“ (2002 a 2005). Každá z posledně jmenovaných dvou knih obsahuje 1000 příkladů z částí reálné analýzy tvořících náplň prvních dvou ročníků studia matematiky na MFF. Pro případné zájemce jsou k dispozici na internetu. *)

Poděkování

Děkuji p. docentu RNDr. Pavlu Pyrihovi, CSc, z katedry matematické analýzy na MFF UK za publikaci tohoto textu na internetu. I. Černý

Souhlas

Praha, květen 2012 I. Černý

*) matematika.cuni/ikalkulus.html

0. Označení

$\{a, b, c, \dots\}$	množina složená z bodů $a, b, c, \dots$
$X \times Y$	kartézský součin množin X, Y
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina všech (konečných) reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina všech (konečných) komplexních čísel
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	reálná a imaginární část komplexního čísla z
0	nula (jakožto reálné číslo) i nulový vektor lineárního prostoru
A^n	n-rozměrný aritmetický prostor
C	prostor všech reálných funkcí spojitých v intervalu $\langle 0, 1\rangle$
E	jednotková matice
M^T	matice transponovaná k matici M
M^{-1}	matice inverzní k matici M
$\det M$	determinant matice M
$A \cdot B$, $A\mathsf{x}$	součin matic A, B, součin matice A a vektoru x
u, v, f, g, x, y	tento typ písma se užívá pro vektory
$\underline{\xi}$	vektor ξ
e_k	jednotkový vektor k-té souřadnicové osy v $\mathbb{A}^n$ a v $\mathbb{R}^n$
$(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v})$	skalární součin vektorů u, v
$\\| \mathsf{u} \\|$	norma vektoru u
$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$	tento typ písma se užívá pro báze
$\mathrm{LO}(Z)$	lineární obal množiny Z
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
ρ, ρ_n	metrika obecně, kartézská (eukleidovská) metrika v $\mathbb{R}^n$

1. Lineární a bilineární formy

Ilja Černý, Liberec 1999, Praha 2012 [1])

Předpokládá se znalost základních pojmů lineární algebry jako je lineární (= vektorový) prostor (nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel), lineární závislost resp. nezávislost vektorů, báze a dimenze lineárního prostoru; pojem matice, matice transponované (k matici M – označení M^T), matice inverzní (označení M^{-1}), součin matic A, B (označení AB) (speciálně: součin matice a vektoru, který podle okolností považujeme buď za matici typu $n \times 1$ („sloupcový vektor") nebo typu $1 \times n$ („řádkový vektor"); skalární součin vektorů u, v (označení $(u \cdot v)$) jako speciální případ násobení matice typu $1 \times n$ a matice typu $n \times 1$, jehož výsledkem je matice typu 1×1, kterou ztotožňujeme s příslušným číslem; pojem determinantu čtvercové matice a jeho základní vlastnosti; řešení soustav (= systémů) lineárních rovnic, jeho existence a jednoznačnost, souvislost s inverzními maticemi a determinanty.

K některým z těchto pojmů se však vrátíme, zopakujeme jejich definice a dokážeme znovu některé souvislosti, a to nejen proto, abychom nemuseli příliš odkazovat na přednášku z algebry nebo na některý učební text, ale také proto, že terminologie není úplně ustálená.

Úmluva. *Prázdnou množinu nebudeme považovat za lineární prostor. Z našich úvah vyloučíme jednou provždy lineární prostor složený pouze z nulového vektoru.*

Příklad 1. Aritmetický n-rozměrný prostor (kde $n \in \mathbb{N}$) je definován jako množina $\mathbb{A}^n$ všech uspořádaných n-tic konečných reálných čísel. [2])

Každé $\mathsf{x} \in \mathbb{A}^n$ má tedy tvar $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla, která se nazývají **složky** nebo **souřadnice** prvku $\mathsf{x} \in \mathbb{A}^n$.

Operace sčítání a násobení číslem se v $\mathbb{A}^n$ definují „po souřadnicích"; to znamená, že pro každé dva elementy

$$\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathsf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \tag{1}$$

z $\mathbb{A}^n$ a pro každé číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathsf{x} + \mathsf{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha\mathsf{x} := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Jak snadno nahlédneme, je $\mathbb{A}^n$ s těmito operacemi *lineárním prostorem*; prvky prostoru $\mathbb{A}^n$ nazýváme podle okolností buď **vektory**, nebo **body**.

Příklad 2. Množina C všech funkcí spojitých v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, v níž je definováno sčítání a násobení číslem obvyklým způsobem, je lineární prostor. $\square$

Připomeňme nyní některé základní pojmy: **Lineární kombinací** vektorů

$$\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \tag{2}$$

(ležících v nějakém lineárním prostoru X) rozumíme každý vektor tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathsf{x}_k\,, \tag{3}$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Jsou-li všechna čísla c_k nulová, říkáme, že lineární kombinace (3) je **triviální**; v opačném případě (kdy aspoň jedno z čísel c_k není nulové) mluvíme o **netriviální** lineární kombinaci.

Vektory (2) se nazývají **lineárně závislé**, je-li možné nulový vektor napsat jako nějakou jejich *netriviální* lineární kombinaci (tj. existují-li čísla $c_1, \ldots, c_n$ tak, že $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 > 0$, ale součet (3) je nulový vektor). Obráceně, platí-li implikace

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathsf{x}_k = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0\,, \tag{4}$$

[1]) Původní skriptum s uvedeným názvem bylo napsáno pro 1. ročník studentů matematiky na Technické univerzitě v Liberci ve školním roce 1999/2000. Výuka podle něj probíhala souběžně s výukou analýzy a algebry, v níž se studenti postupně seznamovali se základními pojmy lineární algebry, které proto nebylo nutné vykládat znovu. Původní skriptum autor nyní na řadě míst upravil, opatřil větším počtem cvičení a jejich řešení ilustroval.

[2]) Tam, kde nebude hrozit nebezpečí z nedorozumění, budeme místo o „konečných reálných číslech" často mluvit krátce o „číslech."

říkáme, že vektory (2) jsou **lineárně nezávislé**. (Jinými slovy, *vektory jsou lineárně nezávislé, je-li každá jejich netriviální lineární kombinace nenulový vektor*.)

Definice. Je-li $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že lineární prostor X má **dimenzi** $\geq n$, existuje-li v něm n lineárně nezávislých vektorů; říkáme, že má **dimenzi** n, má-li dimenzi $\geq n$, ale nemá-li dimenzi $\geq n+1$. Říkáme, že X má **dimenzi** $+\infty$, má-li dimenzi $\geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Má-li X dimenzi d, píšeme $\dim X = d$. [3])

Poznámka 1. Podmínka $\dim X = n \in \mathbb{N}$ znamená, že v X existuje n lineárně nezávislých vektorů, ale každých $n+1$ vektorů tohoto prostoru je lineárně závislých. Rovnost $\dim X = +\infty$ platí právě tehdy, když v X existuje n lineárně nezávislých vektorů *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

Definice. Lineární obal $\mathrm{LO}(Z)$ množiny $Z \subset X$ je definován jako množina všech lineárních kombinací tvaru $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, kde $n \in \mathbb{N}$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou libovolné vektory ze Z a kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolná čísla.

Definice. Podmnožina $\mathfrak{B}$ lineárního prostoru X se nazývá **bází** tohoto prostoru, jestliže platí:

B1. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ navzájem různé vektory z $\mathfrak{B}$, jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

B2. Je-li $x \in X$, existují pro vhodné $n \in \mathbb{N}$ vektory $x_1, \ldots, x_n$ z $\mathfrak{B}$ a čísla $c_1, \ldots, c_n$ tak, že $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$.

Poznámka 2. Je-li splněna podmínka B1, říkáme, že **množina $\mathfrak{B}$ je lineárně nezávislá**. *Podle definice lineárního obalu je tedy množina $\mathfrak{B} \subset X$ bází prostoru X právě tehdy, když je lineárně nezávislá a když $\mathrm{LO}(\mathfrak{B}) = X$.*

Příklad 3. Ukažme, že

$$\dim \mathbb{A}^n = n, \quad \dim C = +\infty .$$

D ů k a z . Vektory

$$e_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots\ ,\ e_n := (0, 0, \ldots, 0, 1) \tag{5}$$

tvoří zřejmě bázi prostoru $\mathbb{A}^n$.

Do prostoru C patří např. všechny funkce Id^k (přesněji: jejich restrikce $\mathrm{Id}^k \,|\langle 0, 1\rangle$), kde $k \geqq 0$ je celé číslo; protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí dobře známá implikace

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \,\mathrm{Id}^k \equiv 0 \ \text{ v } \ \langle 0, 1\rangle \ \Rightarrow\ c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0 ,$$

jsou funkce Id^k, $0 \leqq k \leqq n$, lineárně nezávislé, a to pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice. Vektoru $e_k \in \mathbb{A}^n$, který má k-tou složku rovnou 1, zatímco jeho ostatní složky jsou rovny 0, budeme říkat **jednotkový vektor k-té souřadnicové osy v $\mathbb{A}^n$**.

Upozornění. Pojmy, které nemají nic společného s dimenzí, budeme zavádět v obecných lineárních prostorech X, Y, atd. – bude tak lépe vidět jejich podstata; pojmy, které se opírají o bázi nebo o dimenzi, budeme definovat jen v případě, že dimenze příslušných lineárních prostorů jsou konečné.

Definice. Říkáme, že zobrazení $L : X \to Y$ (kde X, Y jsou lineární prostory) je **aditivní**, platí-li implikace

$$x \in X,\ y \in X \ \Rightarrow\ L(x + y) = L(x) + L(y) , \tag{6}$$

a **homogenní**, platí-li implikace

$$x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ L(\alpha x) = \alpha L(x) . \tag{7}$$

Zobrazení $L : X \to Y$, které je aditivní i homogenní, se nazývá **lineární forma** (v X, s hodnotami v Y). Je-li $Y = \mathbb{R}$, mluvíme o **reálné lineární formě** neboli o **lineárním funkcionálu**. [4])

[3]) V souladu s naší úmluvou se budeme zabývat jen lineárními prostory kladné dimenze; jsou to prostory, v nichž existuje aspoň jeden nenulový vektor. Dimenze prostoru složeného pouze z nulového vektoru by byla rovna 0.

[4]) Poznamenejme, že od slova funkcionál (nikoli tedy od slova funkce) je odvozen název moderní matematické disciplíny, která vznikla začátkem 30-tých let geniální kombinací algebry s analýzou a která se nazývá *funkcionální analýza*. Za zakladatele této disciplíny, bez níž je dnes nemyslitelné řešení mnoha problémů abstraktní teorie i aplikací, u nichž „klasická“ algebra i analýza selhala, se všeobecně považuje polský matematik Stefan Banach.

Poznámka 3. Jak je patrné, *zobrazení $L : X \to Y$ je lineární forma právě tehdy, když platí implikace*

$$x \in X,\ y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)\,. \quad \square \tag{8}$$

Definice. Prostá lineární forma se nazývá **izomorfní zobrazení** (nebo **izomorfismus**). Existuje-li izomorfismus $L : X \overset{\text{na}}{\to} Y$, říkáme, že **prostory** X, Y jsou **izomorfní**. $\square$

Poznámka 4. Protože pro každé dva izomorfní prostory X, Y existuje izomorfismus L prostoru X na prostor Y, odpovídá každé operaci s vektory v X analogická operace v Y (sr. s (6) a (7) – součtu v X je jednoznačně přiřazen součet příslušných obrazů v Y, součinu čísla a vektoru z X součin téhož čísla s obrazem vektoru). Protože L_{-1} je také izomorfismus, je správná i obdobná úvaha, začneme-li operacemi v Y. „Lineární struktura“ obou prostorů je stejná; prostory X, Y se liší nejvýše označením svých elementů. P ř í k l a d : Zobrazení $L : \mathbb{C} \to \mathbb{A}^2$ definované pro $z \in \mathbb{C}$ rovností

$$L(z) := (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \tag{9}$$

je zřejmě izomorfismus $\mathbb{C}$ na $\mathbb{A}^2$. Elementy obou prostorů se sčítají a násobí reálným číslem stejným způsobem; elementy z $\mathbb{C}$ však zapisujeme ve tvaru $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, zatímco v $\mathbb{A}^2$ se přiřazený element napíše jako uspořádaná dvojice $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. $\square$

Následující věta ukazuje, že v prostorech konečné dimenze lze pracovat (ve smyslu poznámky 4) zcela analogickým způsobem jako v aritmetických prostorech $\mathbb{A}^n$, jakmile v nich je dána nějaká báze – a bázi má samozřejmě každý konečněrozměrný prostor.

Věta 1. *Je-li $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ báze prostoru X, lze každý vektor $x \in X$ napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k\,, \tag{10}$$

kde $x_1, \dots, x_n$ jsou reálná čísla.[5]) *Definujeme-li zobrazení $L : X \to \mathbb{A}^n$ rovností*

$$L(x) := (x_1, \dots, x_n)\,, \tag{11}$$

je L izomorfní zobrazení prostoru X na prostor $\mathbb{A}^n$.

D ů k a z této velmi užitečné věty je tak jednoduchý, že jej lze jistě přenechat čtenáři. $\square$

Předpokládejme, že X a Y jsou lineární prostory, přičemž $\dim X = n \in \mathbb{N}$, $\dim Y = p \in \mathbb{N}$; zvolme v X bázi $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, v Y bázi $\mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_p\}$. Každé $x \in X$ lze pak napsat ve tvaru (10), kde složky x_k jsou vektorem x určeny jednoznačně. Podobně lze každý vektor $y \in Y$ napsat ve tvaru

$$y = \sum_{j=1}^{p} y_j g_j\,, \tag{12}$$

kde čísla y_j jsou opět jednoznačně určena vektorem y.

Je-li $L : X \to Y$ lineární forma, je pak $L(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k L(f_k)$. Vektor $L(x) \in Y$ lze rozložit na složky, které označíme $L_1(x), \dots, L_p(x)$; zobrazení $L_k : X \to \mathbb{R}$ (kde $1 \le k \le p$) se nazývají **složky** lineární formy L.[6]) Rovnost $y = L(x)$ lze ekvivalentně napsat ve „složkovém“ tvaru

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k\,,\ j = 1, \dots, p, \tag{13}$$

kde

$$\lambda_{jk} := L_j(f_k) \text{ pro každé } j = 1, \dots, p \text{ a každé } k = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Každé lineární formě $L : X \to Y$, kde $\dim X = n \in \mathbb{N}$, $\dim Y = p \in \mathbb{N}$, je tedy přiřazena matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

[5]) Jsou to, jak známo, tzv. *souřadnice* neboli *složky* vektoru x v bázi $\mathfrak{F}$.
[6]) Jsou to zřejmě lineární funkcionály.

typu $p \times n$, kterou můžeme podrobněji značit např. Λ_{L}.

Obráceně, *je-li dána libovolná matice* (15), *definují rovnosti* $L_j(\mathsf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k$, $1 \le j \le p$, *jistou lineární formu* $\mathsf{L} = (L_1, \dots, L_p) : X \to Y$, kterou můžeme podrobněji značit L_Λ. Je přitom zřejmé, že

$$\Lambda_{\mathsf{L}_\Lambda} = \Lambda\,, \quad \mathsf{L}_{\Lambda_{\mathsf{L}}} = \mathsf{L}. \tag{16}$$

Definice. Říkáme, že Λ_{L} je **matice příslušná k formě** L a že L_Λ je **forma příslušná k matici** Λ. $\square$

Rovnost $\mathsf{y} = \mathsf{L}(\mathsf{x})$, kde L je lineární forma příslušná k matici Λ, lze napsat pomocí maticového součinu $\Lambda\mathsf{x}$, v němž $\mathsf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathsf{y} = (y_1, \dots, y_p)$ považujeme za *sloupcové vektory*:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .\,. \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .\,. \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Pro větší názornost uveďme tuto maticovou rovnost ještě ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1n}x_n\,, \\ y_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2n}x_n\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ y_p &= \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \dots + \lambda_{pn}x_n\,. \end{aligned} \tag{17*}$$

Poznámka 5. To, co jsme řekli obecně pro lineární prostory konečné dimenze, v nichž jsou dány báze, platí samozřejmě i ve speciálním případě, že $X = \mathbb{A}^n$, $Y = \mathbb{A}^p$; *za standardní báze v těchto prostorech považujeme přitom báze složené z jednotkových vektorů příslušných souřadnicových os.*

Poznámka 6. Je vhodné uvědomit si rozdíl mezi *lineárním zobrazením* (= *lineární funkcí*) a *lineární formou*; poznamenejme však, že *terminologie není jednotná*:

Reálné lineární funkce v $\mathbb{R}$ jsou podle jedné z užívaných definic právě všechny funkce tvaru $ax+b$, kde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; jiná definice žádá ještě podmínku $a \neq 0$, tj. vylučuje funkce konstantní. *Funkce* $\mathsf{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je však* (*reálná*) *lineární forma právě tehdy, existuje-li* $a \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\mathsf{L}(x) = ax$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$; zde se tedy $a = 0$ nevylučuje, ale b v první definici lineární funkce je rovné 0. (Lineární forma zobrazuje vždy počátek na počátek; lineární funkce podle první definice je superpozicí lineární formy a *posunutí* o číslo b.)

Podobně je tomu v $\mathbb{A}^2$ a v $\mathbb{A}^3$: Reálnou lineární funkcí v $\mathbb{A}^2$ (resp. v $\mathbb{A}^3$) rozumíme každou funkci tvaru $ax + by + c$ (resp. $ax + by + cz + d$), kde $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ a kde a, b, c jsou reálná čísla (resp. kde $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ a kde a, b, c, d jsou reálná čísla); podle okolností lze v definici vyloučit konstantní funkce tím, že žádáme, aby bylo $a^2 + b^2 > 0$ (resp. $a^2 + b^2 + c^2 > 0$), tj. aby aspoň jedno z čísel a, b (resp. a, b, c) bylo nenulové. Reálné lineární formy v $\mathbb{A}^2$ (resp. v $\mathbb{A}^3$) jsou právě všechny funkce tvaru $ax + by$ (resp. $ax + by + cz$), kde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$); přiřazují počátku $(0, 0) \in \mathbb{A}^2$ (resp. $(0, 0, 0) \in \mathbb{A}^3$) číslo 0, *podmínka* $a^2 + b^2 > 0$ (resp. $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) *se nežádá*. Každá lineární funkce je opět superpozicí jisté lineární formy a posunutí o jisté číslo c v případě $\mathbb{A}^2$ a d v případě $\mathbb{A}^3$.

Obecně, je-li $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ a je-li $\mathsf{L} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^p$ lineární forma, lze rovnost $\mathsf{y} = \mathsf{L}(\mathsf{x})$ napsat ekvivalentně ve složkovém tvaru (17*). Kdyby L bylo lineární zobrazení, museli bychom psát obecněji

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1n}x_n + b_1\,, \\ y_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2n}x_n + b_2\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ y_p &= \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \dots + \lambda_{pn}x_n + b_p\,; \end{aligned} \tag{17**}$$

vektor (17**) vznikne z vektoru (17*) posunutím o vektor $\mathsf{b} = (b_1, \dots, b_p)$. $\square$

Příklad 4. Nechť X je množina všech funkcí, které mají spojité derivace všech řádů v $\mathbb{R}$, a nechť $\mathsf{L}(f) := f'$ pro každé $f \in X$. (Každé funkci $f \in X$ přiřazuje tedy L její derivaci.) Protože pro každé dvě funkce f, g z X a pro každou konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ je $(f + g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$, je L lineární forma v X (s hodnotami opět v X).

Příklad 5. Nechť C znamená totéž jako v příkladu 2. Zvolme pevně $F \in C$ a položme

$$\mathsf{L}_F(f) := \int_0^1 Ff \quad \text{pro každé } f \in C\,; \tag{18}$$

z vlastností integrálu[7]) snadno plyne, že L_F je lineární funkcionál v X.[8]) □

Je-li $p = n$, je matice (15) čtvercová:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}; \tag{19}$$

příslušná lineární forma $\mathsf{L} = \mathsf{L}_\Lambda$ je zobrazením prostoru $\mathbb{A}^n$ *do* $\mathbb{A}^n$.

Je důležité vědět, kdy je L zobrazením $\mathbb{A}^n$ *na* $\mathbb{A}^n$; odpověď je dobře známa z algebry. Před vyslovením příslušného tvrzení připomeňme několik pojmů a označení: Determinant čtvercové matice Λ budeme značit $\det \Lambda$; je-li nenulový, říkáme, že matice je **regulární**, v opačném případě mluvíme o matici **singulární**. Ke každé regulární matici Λ existuje **matice inverzní**, kterou budeme značit Λ^{-1} a která splňuje podmínky

$$\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = E\,, \tag{20}$$

kde

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

je **jednotková matice** téhož typu $n \times n$ jako matice Λ. Její determinant je roven 1.

Z algebry je známo, že *pro každé dvě čtvercové matice* A, B *téhož typu je* $\det AB = \det A \cdot \det B$. Důsledek: *pro každou regulární matici* Λ *je* $\det \Lambda^{-1} = 1/\det \Lambda$.

Buď L *lineární forma příslušná matici* (19). *Pak má rovnice* $\mathsf{L}(x) = y$ (*pro daný vektor* $y \in \mathbb{A}^n$) *řešení právě tehdy, když je* $y \in \mathsf{L}(\mathbb{A}^n)$ [9]); *řešení je pak právě jedno právě tehdy, když je zobrazení* L *prosté.* V algebře se dokazuje, že *soustava rovnic*

$$\begin{aligned} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1n}x_n &= y_1\,, \\ \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2n}x_n &= y_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\,, \\ \lambda_{n1}x_1 + \lambda_{n2}x_2 + \dots + \lambda_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \tag{22}$$

má právě jedno řešení při každé volbě pravých stran právě tehdy, když je $\det \Lambda \neq 0$.

Platí totiž tato věta:

Věta 2. *Lineární forma* L *příslušná k matici* (19) *je zobrazením* $\mathbb{A}^n$ *na* $\mathbb{A}^n$ *právě tehdy, když je matice* Λ *regulární; je-li tato podmínka splněna, je* L *prosté zobrazení.*

Poznámka 7. Píšeme-li soustavu (22) v maticovém tvaru $\Lambda x = y$, dostaneme z ní (za předpokladů věty 2) řešení $x = \Lambda^{-1}y$ násobením obou stran zleva maticí Λ^{-1}.

Připomeňme, že matici inverzní k regulární matici (19) dostaneme takto: Pro každá dvě čísla j, k z množiny $\{1, \dots, n\}$ vynecháme j-tý řádek a k-tý sloupec matice (19), determinant matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která tím vznikne, označíme $\det_{jk}$ a pak vytvoříme *algebraický doplněk* elementu λ_{jk} matice Λ, tedy číslo $\Lambda_{jk} := (-1)^{j+k} \det_{jk}$.

Matice inverzní k Λ *je pak matice, která má v* j*-tém řádku a* k*-tém sloupci číslo* $\Lambda_{kj}/\det \Lambda$. □

---

[7]) Je jedno, máme-li na mysli integrál Newtonův, Riemannův nebo např. Lebesgueův; všechny tyto integrály v dané situaci existují a mají touž hodnotu.

[8]) Příklady 2, 4 a 5 jsme uvedli proto, aby čtenář mohl získat aspoň minimální představu o tom, jak mohou lineární formy vypadat v prostorech nekonečné dimenze.

[9]) $\mathsf{L}(\mathbb{A}^n)$ je obraz prostoru $\mathbb{A}^n$ při zobrazení L, tj. množina všech hodnot, kterých Λ nabývá v $\mathbb{A}^n$.

Vyřešme nyní důležitý problém *transformace souřadnic* při přechodu od jedné báze ke druhé bázi téhož prostoru:

Jsou-li v lineárním prostoru X dimenze n dány dvě báze

$$\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}, \quad \mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_n\}, \tag{23}$$

existuje matice

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \tag{24}$$

tak, že

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n; \tag{25}$$

je to tzv. **matice přechodu od báze $\mathfrak{F}$ k bázi $\mathfrak{G}$**. Je-li

$$N = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \dots & \nu_{1n} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \dots & \nu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_{n1} & \nu_{n2} & \dots & \nu_{nn} \end{bmatrix} \tag{26}$$

matice přechodu od báze $\mathfrak{G}$ k bázi $\mathfrak{F}$, je

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} \nu_{ki} g_i \quad \text{pro} \quad k = 1, \dots, n. \tag{27}$$

Dosadíme-li to do (25), dostaneme:

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\mu_{jk} \sum_{i=1}^{n} \nu_{ki} g_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} \nu_{ki} \Big) g_i \,. \tag{28}$$

Protože vektory g_j jsou lineárně nezávislé, plyne z toho, že

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} \nu_{ki} = \delta_{ji} \,, \tag{29}$$

kde

$$\delta_{ji} := \begin{Bmatrix} 1 & \text{pro} & j = i \\ 0 & \text{pro} & j \neq i \end{Bmatrix} \tag{30}$$

je tzv. **Kroneckerovo delta**. (29) ovšem znamená, že maticový součin MN je jednotková matice E; analogicky se dokáže, že $NM = E$. *Matice M, N jsou tedy navzájem inverzní.*

Dále: V každé z uvedených dvou bází má každý vektor z X jisté souřadnice. Jsou-li čísla x_k jeho souřadnice v bázi $\mathfrak{F}$, čísla ξ_j v bázi $\mathfrak{G}$, znamená to, že

$$\sum_{k=1}^{n} x_k f_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_j g_j \,. \tag{31}$$

Abychom zjistili, jak spolu tyto souřadnice souvisí, dosaďme do pravé strany této rovnosti podle (25), upravme a porovnejme výsledek s její levou stranou; dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j g_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \Big(\sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} \xi_j \Big) f_k = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \,. \tag{32}$$

Protože $\mathfrak{F}$ je báze, jsou koeficienty u vektorů f_k určeny jednoznačně; je tedy $x_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} \xi_j$ pro každé $k = 1, \dots, n$. Abychom dostali rovnosti podobné (25), v nichž je „volným indexem“ j, vyměníme ještě vzájemně indexy j a k; tím dostaneme vztahy

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} \xi_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n. \tag{33}$$

Označíme-li $(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{x}$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) = \underline{\xi}$ [10]), můžeme rovnosti (31) napsat v maticovém tvaru $\mathsf{x} = M^T\underline{\xi}$, kde M^T je matice transponovaná k matici M. Násobíme-li rovnost $\mathsf{x} = M^T\underline{\xi}$ zleva maticí $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T = N^T$, dostaneme rovnost $\underline{\xi} = N^T\mathsf{x}$, tedy ve složkách

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n} \nu_{kj} x_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n. \tag{34}$$

Dokázané výsledky můžeme shrnout do tohoto tvrzení:

Věta 3. *Nechť* (23) *jsou dvě báze téhož lineárního prostoru X a nechť* (24) *je matice přechodu od báze $\mathfrak{F}$ k bázi $\mathfrak{G}$; pak je $N := M^{-1}$ matice přechodu od báze $\mathfrak{G}$ k bázi $\mathfrak{F}$.*

Označíme-li n-tici souřadnic nějakého vektoru z X v bázi $\mathfrak{F}$ resp. $\mathfrak{G}$ znakem $\mathsf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ resp. $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, jsou souvislosti mezi x a $\underline{\xi}$ dány rovnostmi (33) *a* (34), *které lze zapsat v maticovém tvaru $\mathsf{x} = M^T\underline{\xi}$ a $\underline{\xi} = N^T\mathsf{x}$.*

Poznámka 8. Matice přechodu od jedné báze ke druhé je vždy regulární. Platí však i toto obrácené tvrzení: *Je-li $\{f_1, \dots, f_n\}$ báze prostoru $\mathbb{A}^n$ a je-li matice* (24) *regulární, tvoří vektory $g_j := \sum_{k=1}^n \mu_{jk} f_k$, $j = 1, \dots, n$, také bázi prostoru A^n.* D ů k a z je snadný: Je-li

$$0 = \sum_{j=1}^{n} c_j g_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(c_j \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \mu_{jk} \Big) f_k, \tag{35}$$

je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mu_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1, \dots, n \tag{36}$$

v důsledku lineární nezávislosti vektorů f_k. Protože M je regulární matice, má soustava rovnic (36) (v níž jsou neznámými čísla c_j) jen triviální řešení, tj. $c_1 = \dots, c_n = 0$.

Příklad 6. Je-li $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2\}$ je báze prostoru $\mathbb{A}^2$ tvoří vektory

$$g_1 = f_1 + f_2\,, \quad g_2 = -f_1 + f_2 \tag{37}$$

také jeho bázi, přičemž matice přechodu od $\{f_1, f_2\}$ ke $\{g_1, g_2\}$ a příslušná matice inverzní jsou

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad N := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Tomu odpovídají vztahy

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2), \quad f_2 = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2), \tag{39}$$

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2\,, \qquad x_2 = \xi_1 + \xi_2\,, \tag{40}$$

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \xi_2 = \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2). \tag{41}$$

Příklad 7. Jak se snadno přesvědčíme, jsou matice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

vzájemně inverzní, přičemž $\det M = \det N = 1$. Příslušné vztahy mezi bázemi $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$ jsou pak dány rovnostmi

$$g_1 = f_1 + f_3\,, \qquad g_2 = 2f_2 + f_3\,, \qquad g_3 = -2f_1 + 3f_2\,, \tag{43}$$

$$f_1 = -3g_1 + 3g_2 - 2g_3\,, \quad f_2 = -2g_1 + 2g_2 - g_3\,, \quad f_3 = 4g_1 - 3g_2 + 2g_3\,, \tag{44}$$

vztahy mezi souřadnicemi x_k resp. ξ_k vektorů v bázi $\mathfrak{F}$ resp. $\mathfrak{G}$ rovnostmi

---

[10]) Z technických důvodů bohužel nelze ξ sázet jiným druhem písma, má-li označovat *vektor*; proto v podobných situacích písmeno ξ podtrháváme.

(45) $\qquad x_1 = \xi_1 - 2\xi_3\,, \qquad x_2 = 2\xi_2 + 3\xi_3\,, \qquad x_3 = \xi_1 + \xi_2\,,$

(46) $\qquad \xi_1 = -3x_1 - 2x_2 + 4x_3\,, \quad \xi_2 = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3\,, \quad \xi_3 = -2x_1 - x_2 + 2x_3\,. \quad \square$

Vraťme se nyní opět k formám.

Definice. Nechť X je lineární prostor a nechť $B : X \times X \to \mathbb{R}$. Říkáme, že B je (reálná) **bilineární forma** [11]) v X, platí-li implikace

(47) $\quad x \in X,\ y \in X,\ u \in X,\ v \in X,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R},\ \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$B(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v) = \alpha\gamma B(x,u) + \alpha\delta B(x,v) + \beta\gamma B(y,u) + \beta\delta B(y,v)\,.$$

Říkáme, že bilineární forma B je **symetrická**, jestliže

(48)
$$x \in X,\ y \in X \ \Rightarrow\ B(x,y) = B(y,x)\,. \quad \square$$

Bilineární forma je tedy funkcionál dvou proměnných z X, který je lineární v první i ve druhé proměnné. Je-li buď $x = 0$ nebo $y = 0$, je zřejmě $B(x,y) = 0$.

Příklad 8. Nejdůležitější bilineární formou v $\mathbb{A}^n$ je **skalární součin**, který definujeme rovností

(49)
$$(x \cdot y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\,, \quad \text{je-li}\ \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n\,,\ \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n\,;$$

tato bilineární forma je zřejmě symetrická.

Příklad 9. Bilineární formou v prostoru C všech funkcí spojitých v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je např. integrál

(50)
$$B(f,g) := \int_0^1 fg\,;$$

tato forma je zřejmě opět symetrická. $\square$

Pro řadu matematických disciplín (včetně matematické analýzy) je důležité, že skalární součin lze definovat i zcela abstraktně:

Definice. Nechť X je lineární prostor a nechť $S : X \times X \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma v X; pak říkáme, že S je **skalární součin** v X, jestliže platí navíc tyto dvě implikace:

(51)
$$x \in X \ \Rightarrow\ S(x,x) \geqq 0\,; \qquad S(x,x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0\,. \quad \square$$

Bilineární forma z příkladu 8 je zřejmě skalární součin i podle této obecné definice. U formy z příkladu 9 není možná na první pohled zřejmé, že platí druhá implikace v (51). Je-li však $f(a) \neq 0$ v některém bodě $a \in \langle 0,1 \rangle$, je $f^2(a) > 0$ a ze spojitosti funkce f plyne existence nějakého intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0,1 \rangle$, v němž je všude $f^2 \geq \frac{1}{2} f^2(a)$. Pak je však $\int_0^1 f^2 \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(a) = \frac{1}{2} f^2(a)(\beta - \alpha) > 0$. Druhá z implikací v (51) tedy opravdu platí a bilineární forma (50) je také skalární součin.

Označení a definice. Místo $S(x,y)$ budeme (podobně jako v $\mathbb{A}^n$) psát $(x \cdot y)$; lineární prostor, v němž je definován skalární součin, nazveme **unitárním prostorem**. $\square$

Na základě skalárního součinu lze definovat tzv. **normu** (neboli **délku**) vektoru $x \in X$, a to rovností

(52)
$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)}\,.$$

V případě, že $X = \mathbb{A}^n$, je norma vektoru $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ podle (49) dána vzorcem

(53)
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$$

[11]) Mohli bychom říci také *bilineární funkcionál*. Poznamenejme, že např. ve funkcionální analýze se bilineární formy definují daleko obecněji; pro naše účely však stačí speciálnější definice, kterou právě zavádíme.

Norma je reálná nezáporná funkce, která má tyto vlastnosti:

(N$_1$) $$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

(N$_2$) $$x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\,;$$

(N$_3$) $$x \in X,\ y \in X \Rightarrow \|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|\,.$$

Platnost podmínek (N$_1$) a (N$_2$) se ověří velmi snadno a důkaz lze jistě přenechat čtenáři; (N$_3$) je tzv. **trojúhelníková nerovnost**, a k jejímu důkazu budeme potřebovat důležitou **Schwarzovu nerovnost**

(54) $$x \in X,\ y \in X \Rightarrow |(x \cdot y)| \leqq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Důkaz Schwarzovy nerovnosti: Z vlastností skalárního součinu a z definice normy ihned plyne, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$ je

$$0 \leqq \|\alpha x - y\|^2 = ((\alpha x - y)\cdot(\alpha x - y)) = \alpha^2 (x \cdot x) - 2\alpha(x\cdot y) + (y \cdot y) = \alpha^2\,\|x\|^2 - 2\alpha(x\cdot y) + \|y\|^2\,.$$

Kvadratický polynom v proměnné α za posledním rovnítkem je tedy v celém $\mathbb{R}$ nezáporný a jeho diskriminant $4((x\cdot y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2)$ je proto nekladný; z toho plyne, že $(x \cdot y)^2 \leqq \|x\|^2\,\|y\|^2$, a stačí odmocnit, abychom dostali nerovnost z (54).

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti: Pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$ je podle definice normy a podle Schwarzovy nerovnosti

$$\|x+y\|^2 = ((x+y)\cdot(x+y)) = (x\cdot x) + 2(x\cdot y) + (y \cdot y) \leqq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = \big(\,\|x\| + \|y\|\,\big)^2;$$

(N$_3$) získáme z výsledné nerovnosti $\|x+y\|^2 \leqq \big(\,\|x\| + \|y\|\,\big)^2$ odmocněním. □

Poznámka 9. Na základě normy lze definovat **metriku** ρ v X, a to rovností

(55) $$\rho(x,y) := \|x - y\|\,;$$

je to nezáporná funkce, definovaná na kartézském součinu $X \times X$, jejíž hodnota ve dvojici (x,y) bodů z X se nazývá **vzdálenost bodů** x, y **při metrice** ρ. I když je to velmi důležité i v obecném případě, pro nás bude stačit uvědomit si všechny tyto souvislosti jen v $\mathbb{A}^n$.

V $\mathbb{A}^n$ označíme metriku určenou normou (53) znakem ρ_n; je tedy

(56) $$\rho_n(x,y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,, \quad \text{je-li}\ \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n\,.$$

Definice. Norma resp. metrika ρ_n definovaná podmínkou (53) resp. (56) je tzv. **kartézská** nebo **eukleidovská norma** resp. **metrika** v $\mathbb{A}^n$; prostor $\mathbb{A}^n$ se skalárním součinem zavedeným rovností (49), normou (53) a metrikou (56) se nazývá **eukleidovský** n**-rozměrný prostor** a značí se $\mathbb{R}^n$. $\rho_n(x,y)$ je tzv. **kartézská** neboli **eukleidovská vzdálenost** bodů x, y. Místo $\mathbb{R}^1$ se píše obvykle $\mathbb{R}$. [12])

[12]) V literatuře se často nedělá rozdíl mezi aritmetickým prostorem $\mathbb{A}^n$ (v němž je jen „lineární struktura“) a eukleidovským prostorem $\mathbb{R}^n$ (což je prostor $\mathbb{A}^n$, do něhož je zaveden skalární součin a jím indukovaná kartézská norma a vzdálenost) a oba tyto prostory se značí $\mathbb{R}^n$.

2. Ortogonalita

Definice. Dva vektory x, y unitárního prostoru X se nazývají (navzájem) **ortogonální** nebo (navzájem) **kolmé**, je-li jejich skalární součin nulový. [1]) Je-li Z nějaký neprázdný systém vektorů (ležících v nějakém unitárním prostoru X), říkáme, že Z je **ortogonální systém**, jestliže 1) žádný vektor ze Z není nulový a 2) každé dva různé vektory ze Z jsou navzájem ortogonální. $\square$

Věta 4. *Každý ortogonální systém je lineárně nezávislý.*

D ů k a z . Nechť Z je ortogonální systém a nechť platí rovnost $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pro nějaké navzájem různé vektory $x_1, \ldots, x_n$ ze Z a pro nějaká čísla $c_1, \ldots, c_n$. Vynásobíme-li obě strany rovnosti skalárně vektorem x_j, $j = 1, \ldots, n$, dostaneme vzhledem k ortogonalitě rovnost $c_j \, \| x_j \|^2 = 0$; protože podle předpokladu není $x_j = 0$, plyne z nich, že $c_j = 0$. Tím je dokázána lineární nezávislost každého konečného systému vektorů ze Z; systém Z je skutečně lineárně nezávislý. $\square$

Z definice dimenze ihned plyne, že *každý lineární prostor X dimenze $n \in \mathbb{N}$ má bázi*; snadno se též nahlédne, že *všechny jeho báze jsou složeny právě z n vektorů.*

Definice. Báze $\mathfrak{B}$ unitárního prostoru X se nazývá **ortogonální**, je-li ortogonálním systémem; nazývá se **ortonormální**, je-li ortogonální a je-li navíc $\| x \| = 1$ pro každé $x \in \mathfrak{B}$. $\square$

Úmluva. *V dalším budeme stále předpokládat, že dimenze prostoru X je přirozené číslo.* $\square$

Věta 5. *V každém unitárním prostoru X existují ortonormální báze.*

D ů k a z . Dokažme nejdříve existenci ortogonální báze: Nechť $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ je nějaká báze v X; definujme vektory $g_1, \ldots, g_n$ indukcí takto:

Položme $g_1 := f_1$; pak je ovšem $\mathrm{LO}(\{f_1\}) = \mathrm{LO}(\{g_1\})$.

Předpokládejme, že pro některé $k = 1, \ldots, n-1$ jsou již definovány nenulové, navzájem ortogonální vektory $g_1, \ldots, g_k$, pro něž je

$$\mathrm{LO}(\{f_1, \ldots, f_k\}) = \mathrm{LO}(\{g_1, \ldots, g_k\}),$$

a položme

$$g_{k+1} := f_{k+1} - \frac{(f_{k+1} \cdot g_1)}{\| g_1 \|^2} \cdot g_1 - \cdots - \frac{(f_{k+1} \cdot g_k)}{\| g_k \|^2} \cdot g_k . \tag{1}$$

Skalárním násobením rovnosti (1) vektorem g_j, kde $1 \leq j \leq k$, dostaneme rovnost $(g_{k+1} \cdot g_j) = (f_{k+1} \cdot g_j) - (f_{k+1} \cdot g_j) = 0$, protože $(g_i \cdot g_j) = \delta_{ij} \cdot \| g_i \| \cdot \| g_j \|$ [2]); vektory $g_1, \ldots, g_{k+1}$ jsou tedy opět ortogonální. Kdyby bylo $g_{k+1} = 0$, byly by vektory $f_{k+1}, g_1, \ldots, g_k$ lineárně závislé, což není možné, protože $f_{k+1} \notin \mathrm{LO}(\{f_1, \ldots, f_k\}) = \mathrm{LO}(\{g_1, \ldots, g_k\})$. Protože g_{k+1} je lineární kombinací vektorů $f_{k+1}, g_1, \ldots, g_k$ a protože každý z vektorů $g_1, \ldots, g_k$ je lineární kombinací vektorů $f_1, \ldots, f_k$, patří g_{k+1} do $\mathrm{LO}(\{f_1, \ldots, f_{k+1}\})$. Přímo z (1) je patrné, že $f_{k+1} \in \mathrm{LO}(\{g_1, \ldots, g_{k+1}\})$. V důsledku toho je zřejmě $\mathrm{LO}(\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}) = \mathrm{LO}(\{g_1, \ldots, g_{k+1}\})$.

Tím jsme indukcí sestrojili n-tici $\{g_1, \ldots, g_n\}$ nenulových, navzájem ortogonálních vektorů, pro něž je $X = \mathrm{LO}(\{f_1, \ldots, f_n\}) = \mathrm{LO}(\{g_1, \ldots, g_n\})$. Vektory $g_1, \ldots, g_n$ tvoří tedy ortogonální bázi prostoru X.

Vektory $g_k / \| g_k \|$, $1 \leqq k \leqq n$, tvoří pak zřejmě bázi ortonormální. $\square$

Příklad 10. Vektory

$$f_1 = (1, 1, 1), \quad f_2 = (1, 2, 0), \quad f_3 = (0, 1, 2) \tag{2}$$

z $\mathbb{A}^3$ jsou lineárně nezávislé, protože

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0,$$

[1]) Podle této definice je každý vektor kolmý k nulovému vektoru.
[2]) δ_{ij} je ovšem Kroneckerovo delta – viz (30) v kap. 1.

takže uvedená matice je regulární. Utvořme z vektorů (2) ortogonální resp. ortonormální bázi postupem uvedeným v důkazu věty 5.

Položme $g_1 := f_1$, vypočtěme $(f_2 \cdot g_1) = 3$, $\|g_1\|^2 = 3$ a definujme

$$g_2 := f_2 - g_1 = (1,2,0) - (1,1,1) = (0,1,-1);$$

pak je $\|g_2\|^2 = 2$. Vypočtěme $(f_3 \cdot g_1) = 3$, $(f_3 \cdot g_2) = -1$ a nechť

$$g_3 := f_3 - g_1 + \tfrac{1}{2} g_2 = (0,1,2) - (1,1,1) + \tfrac{1}{2}(0,1,-1) = (-1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Vektory g_1, g_2, g_3 tvoří hledanou ortogonální bázi; ortonormální bázi z ní dostaneme dělením každého z nalezených vektorů g_j příslušnou normou; protože $\|g_3\|^2 = \frac{3}{2}$, získáme tím ortonormální vektory

(3) $$\sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot (1,1,1)\,, \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot (0,1,-1)\,, \quad \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot (-1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Poznamenejme, že pokud by nevadilo, že báze je jen ortogonální, nahradili bychom „při praktickém počítání“ vektor g_3, který má dvě složky necelé, asi jeho dvojnásobkem $2g_3 = (-2,1,1)$. □

Předpokládejme nyní, že jsou dány dva n-rozměrné unitární prostory X a Y a nechť

(4) $$\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\} \ \text{ resp. } \ \mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$$

je ortonormální báze prostoru X resp. Y. Definujme zobrazení $L : X \to Y$ podmínkou:

(5) $$\text{Je-li } \ x = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k\,, \ \text{ je } \ L(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k g_k\,.$$

Definice zobrazení L je *korektní*, protože každé $x \in X$ lze napsat v uvedeném tvaru právě jedním způsobem, takže i příslušné $L(x)$ je určeno jednoznačně. Snadno nahlédneme, že

L je izomorfní zobrazení prostoru X na prostor Y.

Ortonormalita bází $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ je totéž co platnost rovností

(6) $$(f_j \cdot f_k) = (g_j \cdot g_k) = \delta_{jk} \ \text{ pro } \ j = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, n;$$

δ_{jk} je samozřejmě opět Kroneckerovo delta. Z (5) a (6) ihned plyne, že

(7) $$\|x\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k f_k\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k (f_j \cdot f_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k \delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,,$$

a podobně ovšem

(8) $$\|L(x)\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j g_j \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k g_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,.$$

Protože norma je nezáporné číslo, plyne z rovnosti $\|L(x)\|^2 = \|x\|^2$ odmocněním rovnost $\|L(x)\| = \|x\|$; tím je dokázána platnost implikace

(9) $$x \in X \ \Rightarrow \ \|L(x)\| = \|x\|\,.$$

$\|x\|$ je norma v prostoru X, $\|L(x)\|$ norma v prostoru Y; tuto okolnost jsme nevyznačili, ale pokud by hrozilo nedorozumění, mohli bychom psát např. $\|x\|_X$ a $\|L(x)\|_Y$. Označíme-li ρ_X a ρ_Y příslušné metriky v X a v Y, vidíme, že platí implikace

(10) $$x' \in X\,, \ x'' \in X \ \Rightarrow \ \rho_X(x', x'') = \rho_Y(L(x'), L(x''))\,,$$

která znamená, že *vzdálenost kterýchkoli dvou bodů x', x'' prostoru X je rovna vzdálenosti příslušných obrazů $L(x')$, $L(x'')$ v Y.* [3])

[3]) Striktní rozlišení situací, kdy o x mluvíme jako o *bodu* a kdy x nazýváme *vektor*, přenecháváme geometrii; zde tyto dva pojmy užíváme „podle okolností“ a nerozlišujeme je ani označením. Podmínky (9) a (10) jsou ekvivalentní, protože např. $\|x\|$ je vzdálenost bodu x od počátku (a zároveň délka příslušného radiusvektoru, který značíme také x); vzdálenost dvou bodů x, y je norma jejich rozdílu (neboli délka vektoru s počátečním bodem x a koncovým bodem y, neboli délka rozdílu radiusvektorů obou těchto bodů).

Definice. Splňuje-li zobrazení $L : X \to Y$ (kde X, Y jsou unitární prostory) implikaci (9), říkáme, že je **izometrické**; existuje-li izometrické zobrazení X na Y, říkáme, že **prostory** X, Y jsou **izometrické**. $\square$

Pro každé izometrické zobrazení $L : X \to Y$ platí ovšem i implikace (10), a odvozené výsledky lze shrnout takto:

Věta 6. *Jsou-li* (4) *ortonormální báze dvou n-dimenzionálních unitárních prostorů X, Y, je lineární forma definovaná podmínkou* (5) *izometrickým izomorfním zobrazením prostoru X na prostor Y.*

Poznámka 10. Předpokládejme, že v unitárním prostoru dimenze n byla zvolena nějaká ortonormální báze $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$; nechť zobrazení $L : X \to \mathbb{R}^n$ je definováno takto: Je-li $x = \sum_{k=1}^{n} x_n f_k$, je $L(x) := (x_1, \dots, x_n)$. Pak je L nejen izomorfní zobrazení X na $\mathbb{R}^n$ (sr. s větou 1), ale je to zároveň i zobrazení izometrické. Tato skutečnost se někdy popisuje heslem, že *algebraická i metrická struktura všech n-dimenzionálních unitárních prostorů je stejná jako struktura prostoru $\mathbb{R}^n$.* Místo abychom pracovali v obecném unitárním prostoru s ortonormální bází, můžeme pracovat v $\mathbb{R}^n$, v němž je „základní bází“ báze

$$\mathfrak{E} := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{11}$$

složená z jednotkových vektorů souřadnicových os a jehož body (vektory) jsou uspořádané n-tice reálných čísel. Norma i vzdálenost se přitom měří „kartézsky“ neboli „eukleidovsky“. $\square$

Izometrické zobrazení zachovává vzdálenosti; ukažme, že – pokud je lineární formou – je to totéž, jako že zachovává skalární součiny:

Věta 7. *Jsou-li X, Y unitární prostory, je lineární forma $L : X \to Y$ izometrická právě tehdy, když je*

$$(L(u) \cdot L(v)) = (u \cdot v) \quad \text{pro každé dva vektory} \quad u \in X, \ v \in X. \tag{12}$$

D ů k a z . Uvažme především, že

$$\| u + v \|^2 = ((u + v) \cdot (u + v)) = (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v) = \| u \|^2 + 2(u \cdot v) + \| v \|^2 ,$$

takže

$$(u \cdot v) = \tfrac{1}{2}(\| u + v \|^2 - \| u \|^2 - \| v \|^2). \tag{13}$$

Analogicky se pro každou lineární formu L dokáže rovnost

$$(L(u) \cdot L(v)) = \tfrac{1}{2}(\| L(u + v) \|^2 - \| L(u) \|^2 - \| L(v) \|^2). \tag{14}$$

Je-li L izometrická lineární forma, pravé strany identit (13) a (14) se podle (9) rovnají; totéž tedy platí o jejich levých stranách, a podmínka (12) platí.

Obráceně, platí-li podmínka (12), je-li $x \in X$ libovolný vektor a položíme-li $u = v = x$, dostaneme rovnost $\| L(x) \|^2 = \| x \|^2$, takže forma L je izometrická.

Tím je věta 7 dokázána. $\square$

Nyní vyšetříme, co nového přinese oproti obecné situaci z věty 3 předpoklad, že báze $\mathfrak{F}$ je ortonormální a báze $\mathfrak{G}$ buď ortogonální nebo ortonormální; ukážeme, že tyto předpoklady souvisí s jistými nutnými a postačujícími podmínkami kladenými na matici přechodu od báze $\mathfrak{F}$ k bázi $\mathfrak{G}$:

Věta 8. *Nechť $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ a $\mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$ jsou dvě báze téhož unitárního prostoru X a nechť*

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

je matice přechodu od báze $\mathfrak{F}$ k bázi $\mathfrak{G}$; nechť báze $\mathfrak{F}$ je ortonormální. Označme

$$r_j := (\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots, \mu_{jn}), \quad s_j := (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \dots, \mu_{nj}), \quad j = 1, \dots, n, \tag{16}$$

řádky resp. sloupce matice (15). *Pak platí:*

1. *Báze $\mathfrak{G}$ je ortogonální právě tehdy, když jsou vektory $r_1, \dots, r_n$ ortogonální.*

2. *Báze $\mathfrak{G}$ je ortonormální právě tehdy, když je*

$$(r_i \cdot r_j) = \delta_{ij} \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n, \tag{17_r}$$

a také právě tehdy, když je

$$(s_i \cdot s_j) = \delta_{ij} \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n. \tag{17_s}$$

Je-li kterákoli z těchto ekvivalentních podmínek splněna, je

$$M^{-1} = M^T, \quad \det M = \pm 1. \tag{18}$$

D o d a t e k . Je-li báze $\mathfrak{G}$ ortonormální a je-li

$$\sum_{k=1}^{n} x_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k, \tag{19}$$

je

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} \xi_k, \quad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} x_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n; \tag{20}$$

při označení $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ lze tyto vztahy zapsat v maticovém tvaru

$$x = M^T \underline{\xi}, \quad \underline{\xi} = Mx. \tag{21}$$

D ů k a z . 1. Za předpokladů věty je

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n; \tag{22}$$

vzhledem k tomu, že báze $\mathfrak{F}$ je ortonormální, je proto

$$(g_i \cdot g_j) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} f_k \cdot \sum_{m=1}^{n} \mu_{jm} f_m \Big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mu_{ik} \mu_{jm} \delta_{km} = \sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} \mu_{jk} = (r_i \cdot r_j). \tag{23}$$

Odtud je zřejmé, že vektory g_i jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální řádky r_i matice M.

2. Nechť je nyní i báze $\mathfrak{G}$ ortonormální; pak je $(g_i \cdot g_j) = \delta_{ij}$, takže podle (23) je $(r_i \cdot r_j) = \delta_{ij}$.

Jak víme z věty 3, je maticí přechodu od báze $\mathfrak{G}$ k bázi $\mathfrak{F}$ matice $N := M^{-1}$ inverzní k M. Označíme-li její prvky ν_{jk}, je

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} g_k \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n. \tag{24}$$

Násobíme-li (22) skalárně vektorem f_i a (24) vektorem g_j, dostaneme vzhledem k ortonormalitě obou bází rovnosti

$$(g_j \cdot f_i) = \mu_{ji}, \quad (f_i \cdot g_j) = \nu_{ij} \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n;$$

protože se levé strany rovnají, platí totéž o pravých stranách. Tím je dokázáno, že matice M a N jsou vzájemně transponované; sloupce matice M jsou řádky matice N. Protože řádky matice N splňují podmínku analogickou (17_r), je zřejmé, že (pro matici M) jsou podmínky (17_r) a (17_s) ekvivalentní.

Matice N je zároveň transponovaná i inverzní k M; tím je dokázána první z rovností (18). Abychom dokázali druhou z těchto rovností, uvažme, že a) $E = MM^{-1}$, b) determinant součinu dvou matic je roven součinu jejich determinantů, c) $\det M = \det M^T$. Je proto $1 = \det E = \det M \cdot \det M^{-1} = \det M \cdot \det M^T = (\det M)^2$, a v důsledku toho $\det M = \pm 1$.

3. Dodatek je přímým důsledkem hlavní části právě dokazované věty a věty 3, protože nyní je $N = M^{-1} = M^T$, tedy $N^T = M$.

Tím je věta 8 dokázána. $\square$

Definice. Říkáme, že matice (15) je **ortogonální**, splňuje-li podmínky

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\mu_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n. \quad \square \tag{25}$$

Poznámka 11. *Ortogonální matice jsou tedy právě všechny matice přechodu od jedné ortonormální báze ke druhé ortonormální bázi.*

Přechodu od ortonormální báze $\mathfrak{F}$ k ortogonální bázi $\mathfrak{G}$ odpovídají obecnější podmínky

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\mu_{jk} = \delta_{ij} \, \| g_i \| \, \| g_j \| \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

vyplývající ihned z (23), protože $(g_i \cdot g_j) = \delta_{ij} \, \| g_i \| \, \| g_j \|$. [4])

Jak jsme viděli, splňuje každá ortogonální matice M rovnost $\det M = \pm 1$; *tato podmínka je nutná, nikoli však postačující pro ortogonalitu matice M*: Má-li matice typu 2×2 řádky $(2, 3)$ a $(3, 5)$, je její determinant roven 1, ale matice zřejmě není ortogonální. $\square$

Dokažme ještě tento důležitý důsledek vět 7 a 8:

Věta 9. *Nechť Λ je matice typu $n \times n$ a nechť $L = L_\Lambda$ je příslušná lineární forma zobrazující $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Pak jsou ekvivalentní tyto tři podmínky:*

1. *Matice Λ je ortogonální.*
2. *Lineární forma L je izometrická.*
3. *Rovnost $(L(u) \cdot L(v)) = (u \cdot v)$ platí pro každé dva vektory $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$.*

D ů k a z . 1. Podle věty 7 jsou podmínky 2 a 3 ekvivalentní.

2. Uvažme, že je

$$L_k(e_i) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{km}(e_i)_m = \lambda_{ki} \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Je-li Λ ortogonální matice, platí podle věty 8 totéž o matici Λ^T; z (27) a z podmínky 1 tedy plyne, že

$$(L(e_i) \cdot L(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} L_k(e_i) L_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki}\lambda_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Protože každé $x \in \mathbb{R}^n$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, je v důsledku toho

$$\| L(x) \|^2 = (L(x) \cdot L(x)) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x) L_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i L_k(e_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j L_k(e_j) \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(x_i x_j \sum_{k=1}^{n} L_k(e_i) L_k(e_j) \Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (L(e_i) \cdot L(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \| x \|^2 .$$

Forma L je tedy izometrická; platí podmínka 2, tedy i podmínka 3.

3. Obráceně, platí-li podmínka 3, je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ki}\lambda_{kj} = \sum_{k=1}^{n} L_k(e_i) L_k(e_j) = (L(e_i) \cdot L(e_j)) = (e_i \cdot e_j) = \delta_{ij} \, ,$$

takže matice Λ^T je ortogonální; totéž platí podle věty 8 i o matici Λ. $\square$

Poznámka 12. Je-li M matice typu $n \times n$, existují dvě interpretace rovností

$$\underline{\xi} = M x, \quad x = M^{-1} \underline{\xi} \; : \tag{29}$$

[4]) Jak je patrné, terminologie zde nepatří k nejlogičtějším: Přirozenější by patrně bylo říkat maticím splňujícím podmínku (25) *ortonormální* a termín *ortogonální* matice vyhradit maticím splňujícím obecnější podmínku (26). Abychom však čtenáři nekomplikovali studium učebnic algebry a geometrie, užíváme terminologii běžnou v příslušné literatuře.

1. Pracujeme se dvěma bázemi $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, $\mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$ téhož unitárního prostoru X, M je matice přechodu od $\mathfrak{F}$ ke $\mathfrak{G}$, jistý vektor z X má souřadnice x_k v bázi $\mathfrak{F}$ a ξ_k v bázi $\mathfrak{G}$. Užíváme-li označení $\mathsf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, je

$$\mathsf{x} = M^T \underline{\xi}, \quad \underline{\xi} = N^T \mathsf{x}, \tag{30}$$

kde $N = M^{-1}$, a platí tyto čtyři vztahy:

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k, \quad f_j = \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} g_k, \quad x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} \xi_k, \quad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \nu_{kj} x_k, \quad j = 1, \dots, n. \tag{31}$$

Je-li matice M *ortogonální*, platí totéž o matici $N = M^{-1}$, a navíc je $M^{-1} = M^T$; místo (31) lze pak psát

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} f_k, \quad f_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} g_k, \quad x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} \xi_k, \quad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n. \tag{32}$$

2. Pracujeme jen s jednou ortonormální bází (v unitárním prostoru X) a lineární formu M příslušnou k matici M považujeme za zobrazení prostoru X do sebe; jak víme, je tato forma izomorfismem X na X. Bod $\mathsf{x} \in X$, jehož souřadnice (v dané bázi) jsou x_k, $k = 1, \dots, n$, píšeme ve tvaru $\mathsf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Formou M se x zobrazí na $\mathsf{M}(\mathsf{x}) = M\mathsf{x}$; souřadnice tohoto bodu označíme ξ_k, $k = 1, \dots, n$, a místo $M\mathsf{x}$ píšeme $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Vztahy mezi souřadnicemi bodu x a jeho obrazu $\underline{\xi} = \mathsf{M}(\mathsf{x})$ jsou pak dány rovnostmi

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} \xi_k, \quad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n, \tag{33}$$

kde opět $N := M^{-1}$; rovnosti (33) lze ovšem zapsat i v maticovém tvaru

$$\mathsf{x} = N\underline{\xi}, \quad \underline{\xi} = M\mathsf{x}. \tag{34}$$

Je-li matice M ortogonální, je lineární forma M izometrická a izomorfní, $N = M^T$, a místo (33) lze psát

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{kj} \xi_k, \quad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n, \tag{35}$$

neboli

$$\mathsf{x} = M^T \underline{\xi}, \quad \underline{\xi} = M\mathsf{x}. \quad \square \tag{36}$$

Věty 7 a 8 nám dávají možnost odvodit důležitou souvislost skalárního součinu a norem, která se velmi často užívá jak v geometrii, tak i např. ve fyzice:

Nechť $n > 1$ a nechť $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$ jsou dva libovolné nenulové vektory. Protože jejich skalární součin $(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v})$ podle vět 7 – 9 nezávisí na tom, jakou ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ zvolíme, můžeme předpokládat, že oba vektory leží v lineárním obalu vektorů e_1, e_2. Pak je třetí až n-tá složka každého z vektorů u, v rovna nule: $\mathsf{u} = (u_1, u_2, 0, \dots, 0)$, $\mathsf{v} = (v_1, v_2, 0, \dots, 0)$ a $(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Označme α úhel sevřený vektory u, v a buď α_1 resp. α_2 úhel sevřený vektorem u resp. v a vektorem e_1. Pravoúhlé souřadnice u_j, v_j, $j = 1, 2$, se pomocí příslušných polárních souřadnic vyjádří rovnostmi

$$u_1 = \|\mathsf{u}\| \cos\alpha_1, \quad v_1 = \|\mathsf{v}\| \cos\alpha_2, \quad u_2 = \|\mathsf{u}\| \sin\alpha_1, \quad v_2 = \|\mathsf{v}\| \sin\alpha_2, \tag{37}$$

z nichž vyplývá, že $(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) = \|\mathsf{u}\| \cdot \|\mathsf{v}\| \cdot (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2)$. Protože $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, je tedy

$$(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) = \|\mathsf{u}\| \cdot \|\mathsf{v}\| \cdot \cos\alpha, \tag{38}$$

kde α – jak již bylo řečeno – je úhel sevřený vektory u, v.

Vzorec (38) platí však i v případě, kdy jsou vektory u, v lineárně závislé, tedy i pro $n = 1$. Pokud jsou oba vektory nenulové, lze předpokládat, že jsou násobky vektoru e_1, a opakovat hořejší úvahu s tím, že nyní jsou i jejich druhé složky nulové. Je-li jeden z nich nulový vektor, platí (38) s libovolným $\alpha \in \mathbb{R}$, ale „úhel sevřený vektory u, v" není definován.

Doplníme-li tedy běžně užívanou definici a **definujeme-li** *úhel sevřený mezi dvěma vektory, z nichž jeden je nulový*, např. *jako nulu*, bude (38) platit obecně:

Věta 10. *Znamená-li α úhel sevřený vektory $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, platí rovnost* (38). $\square$

Definice. Je-li pro některé dvě báze lineárního prostoru X determinant příslušné matice přechodu kladný resp. záporný, říkáme, že báze jsou **souhlasně** resp. **opačně orientované**. $\square$

Poznámka 13. Definice je korektní, protože 1) determinant matice přechodu není nulový; 2) podmínka je symetrická, protože je-li D determinant matice přechodu od $\mathfrak{F}$ ke $\mathfrak{G}$, je $1/D$ determinant matice přechodu od $\mathfrak{G}$ k $\mathfrak{F}$, takže oba determinanty mají stejné znaménko.

Snadno nahlédneme, že tato binární relace mezi dvojicemi bází daného lineárního prostoru X je *ekvivalencí* ve smyslu obecné teorie množin a má za následek rozklad množiny všech bází prostoru X na dvě disjunktní třídy. $\square$

Prakticky velmi užitečná je následující definice a úmluva:

Definice. Buď X lineární prostor a nechť je v něm pevně zvolena nějaká báze $\mathfrak{B}$. Pak říkáme, že báze $\mathfrak{F}$ prostoru X je **kladná** nebo **záporná** podle toho, zdali jsou báze $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{F}$ orientovány souhlasně nebo opačně.

Úmluva. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ považujeme za kladnou bázi v $\mathbb{R}^n$ bázi*

$$\mathfrak{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

složenou z jednotkových vektorů souřadnicových os.

Příklad 11. V $\mathbb{R}$ jsou báze složené z čísel 1 resp. -1 orientované opačně; první z nich je kladná, druhá záporná. Jiné ortonormální báze v $\mathbb{R}$ nejsou.

V $\mathbb{R}^2$ je např. báze $\{(0,1),(-1,0)\}$ kladná, báze $\{e_2, e_1\}$ záporná.

V $\mathbb{R}^3$ jsou báze $\{e_2, e_3, e_1\}$ a $\{e_3, e_1, e_2\}$ kladné, báze $\{e_1, e_3, e_2\}$, $\{e_3, e_2, e_1\}$, $\{e_2, e_1, e_3\}$ záporné. Báze složená z vektorů g_1, g_2, g_3 z příkladu 10 je kladná. [5])

Příklad 12. Nechť $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2\}$ je nějaká kladná ortonormálmí báze v $\mathbb{R}^2$; souřadnice bodů z $\mathbb{R}^2$ v bázi $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2\}$ resp. $\mathfrak{F}$ značme x_1, x_2 resp. ξ_1, ξ_2. Nakreslíme-li souřadnicové osy dané vektory e_1, e_2 „obvyklým způsobem“ (první osa vodorovná, druhá svislá), znamená-li α úhel sevřený vektory e_1, f_1, a dokreslíme-li přímky dané počátkem a vektory f_1, f_2, najdeme snadno transformační rovnice mezi souřadnicemi x_1, x_2 a ξ_1, ξ_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cos\alpha - \xi_2 \sin\alpha\,, \\ x_2 &= \xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \cos\alpha\,, \end{aligned} \tag{39}$$

Protože však nechceme spoléhat na obrázky, odvodíme tyto rovnice z číselných údajů, které máme k dispozici: Přechod od báze $\mathfrak{E}$ k bázi $\mathfrak{F}$ je zprostředkován příslušnou maticí přechodu; nechť je to matice

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Podle věty 8 je Γ ortogonální matice; protože báze $\mathfrak{F}$ je kladná, je navíc $\det\Gamma = 1$. Jsou tedy splněny tyto čtyři rovnice:

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1\,,\quad c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0\,,\quad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1\,,\quad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1\,. \tag{41}$$

Sečteme-li první a třetí z nich a odečteme-li od výsledku dvojnásobek čtvrté rovnice, dostaneme po evidentní úpravě rovnost $(c_{11} - c_{22})^2 + (c_{12} + c_{21})^2 = 0$, takže

$$c_{11} = c_{22}\,,\quad c_{21} = -c_{12}\,. \tag{42}$$

Protože $f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2$, je $(f_1 \cdot e_1) = c_{11}$, a podle věty 10 tedy $c_{11} = \cos\alpha$ (kde α je úhel sevřený vektory e_1, f_1). Protože vektory e_1, e_2 svírají pravý úhel, je úhel sevřený vektory f_1, e_2 roven $\frac{1}{2}\pi - \alpha$; jeho kosinus je roven $(f_1 \cdot e_2) = c_{12}$. Protože $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$, je zřejmé, že

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{40*}$$

Protože k vyjádření souřadnic x_j pomocí souřadnic ξ_k je třeba (podle poznámky 11) užít transponovanou matici Γ^T, platí (39).

[5]) Poznamenejme, že právě zavedené pojmy jsou důležité nejen v geometrii, ale i např. ve fyzice; řada vět resp. zákonů nezávisí totiž na souřadnicovém systému jen v případě, že příslušné báze jsou orientovány souhlasně.

3. Kvadratické formy

Definice. Nechť X je lineární prostor a nechť $B : X \times X \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. Pak říkáme, že funkce $K : X \times X \to \mathbb{R}$ definovaná pro $x \in X$ rovností $K(x) := B(x, x)$ je **kvadratická forma v X** (**příslušná k formě B**). $\square$

Buď $B(x, y)$ symetrická bilineární forma v unitárním prostoru X dimenze n a nechť je dána nějaká báze $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ tohoto prostoru. Píšeme-li

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\,, \quad y = (y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \tag{1}$$

a položíme-li

$$\lambda_{jk} := B(f_j, f_k) \ \text{ pro } \ j = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, n, \tag{2}$$

je (v důsledku bilinearity formy)

$$B(x, y) = B\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j, \sum_{k=1}^{n} y_k f_k\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_j y_k \tag{3}$$

pro všechna $x \in X$, $y \in X$. Protože B je symetrická forma, je $\lambda_{kj} = B(f_k, f_j) = B(f_j, f_k) = \lambda_{jk}$. Matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

utvořená z čísel (2) je tedy symetrická. Označíme-li L lineární formu příslušnou k této matici, je

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_j y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} y_k\Big) = (x \cdot L(y))$$

a také

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_j y_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} x_j y_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} x_j\Big) y_k = (L(x) \cdot y)\,.$$

Shrneme-li odvozené výsledky a aplikujeme-li je na kvadratickou formu K příslušnou k bilineární formě B, dostaneme toto tvrzení:

Věta 11. *Nechť B je symetrická bilineární forma v unitárním prostoru X, nechť $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ je báze prostoru X a nechť čísla λ_{jk} jsou definována rovnostmi* (2)*; pak je matice* (4) *symetrická. Užíváme-li označení* (1) *a znamená-li L lineární formu příslušnou k matici* (4), *je*

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_j y_k = (L(x) \cdot y) = (x \cdot L(y)) \ \text{ pro všechna } \ x \in X, \ y \in X\,. \tag{5}$$

Důsledek: Za vyslovených předpokladů je

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_j x_k = (L(x) \cdot x) = (x \cdot L(x)) \ \text{ pro každé } \ x = (x_1, \dots, x_n) \in X\,. \quad \square \tag{6}$$

Definice. Za situace z věty 11 budeme říkat, že (4) je **matice příslušná k bilineární formě** (5) a také **ke kvadratická formě** (6) **v bázi $\mathfrak{F}$**. $\square$

Pracujeme-li v $\mathbb{R}^n$, užíváme nejčastěji ortonormální bázi $\mathfrak{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$; při této bázi však nemusí mít daná bilineární resp. kvadratická forma vždy „nejjednodušší" tvar. Lze ukázat, že *pro každou kvadratickou formu existuje ortonormální báze $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ tak, že při označení* (1) a (2) *je $\lambda_{jk} = 0$ pro všechna $j \neq k$*; jak známo, říkáme za této situace, že matice Λ je **diagonální**. Popsaná situace je natolik důležitá jak pro algebru, tak i pro geometrii, že je provázena odpovídající terminologií. [1])

[1]) V kapitole 4 uvidíme, jak souvisí kvadratické formy s kuželosečkami, tedy „křivkami druhého stupně" v $\mathbb{R}^2$. Ukáže se při tom, že pokud je příslušná matice diagonální, rozeznáme daleko snadněji, o jakou kuželosečku se jedná. Podobně je tomu v $\mathbb{R}^n$, kde $n > 2$, situace je však podstatně složitější; „plochy druhého stupně" v $\mathbb{R}^3$ se nazývají *kvadriky*.

Definice. Je-li B resp. K symetrická bilineární resp. kvadratická forma a je-li pro některou bázi $\mathfrak{F} = \{\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n\}$ (při dosavadním označení) příslušná matice (4) diagonální, říkáme, že **forma** $\mathsf{B}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ resp. $\mathsf{K}(\mathsf{x})$ **má** v této bázi **diagonální tvar**. $\square$

Podmínka, že $\mathsf{K}(\mathsf{x})$ má (v bázi $\mathfrak{F} = \{\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n\}$) diagonální tvar, znamená, že $\mathsf{K}(\mathsf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kk} x_k^2$. Označíme-li $\lambda_k := \lambda_{kk}$ pro $k = 1, \ldots, n$, dostaneme pro diagonální tvar kvadratické formy vyjádření

$$\mathsf{K}(\mathsf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \,, \tag{7}$$

kde λ_k jsou reálná čísla. $\square$

Abychom mohli uvést obecný příklad ortogonálních resp. ortonormálních bází, v nichž má daná kvadratická forma diagonální tvar, potřebujeme tři nové pojmy:

Definice. Nechť Λ je čtvercová matice typu $n \times n$ a nechť E je jednotková matice téhož typu. Říkáme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo** matice Λ, je-li řešením rovnice

$$\det(\Lambda - \lambda E) = 0 \,, \tag{8}$$

která se nazývá **charakteristická rovnice matice** Λ.

Říkáme, že (n-rozměrný) vektor v je **vlastní vektor** matice Λ příslušný k jejímu vlastnímu číslu λ, je-li v *nenulovým* řešením (maticové) rovnice

$$(\Lambda - \lambda E)\mathsf{v} = 0 \,. \quad \square \tag{9}$$

Poznámka 14. Rovnici (8) lze podrobněji napsat ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - \lambda & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,; \tag{8*}$$

protože má stupeň n, má právě n *komplexních* kořenů, pokud každý počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost. V dalším by pro nás byly imaginární kořeny této rovnice bez významu; proto je důležité toto tvrzení:

(10) *Je-li matice* Λ *symetrická, jsou všechny kořeny rovnice* (8) *reálné.*

Toto tvrzení nebudeme pro obecné $n \in \mathbb{N}$ dokazovat, protože je nebudeme potřebovat: uvádíme je jen jako informaci pro čtenáře. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální a pro $n = 2$ jeho platnost ověříme později.

Velmi snadný je však důkaz tohoto užitečného obecného tvrzení:

Věta 12. *Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům symetrické matice* Λ *jsou ortogonální.*

D ů k a z . Jsou-li $\lambda \neq \mu$ dvě vlastní čísla symetrické matice Λ a je-li u resp. v vlastní vektor příslušný k λ resp. k μ, je $(\Lambda - \lambda E)\mathsf{u} = 0$, $(\Lambda - \mu E)\mathsf{v} = 0$, tedy $\Lambda\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$ a $\Lambda\mathsf{v} = \mu\mathsf{v}$. Protože matice Λ je symetrická, je (podle toho, co jsme řekli ve větě 11 [2])

$$0 = (\Lambda\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) - (\mathsf{u} \cdot \Lambda\mathsf{v}) = (\lambda\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) - (\mathsf{u} \cdot \mu\mathsf{v}) = (\lambda - \mu)(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v});$$

protože je $\lambda - \mu \neq 0$, musí být $(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) = 0$, což právě znamená, že vektory u, v jsou ortogonální. $\square$

Z algebry je dobře známo, že homogenní soustava rovnic

$$\begin{aligned} (\lambda_{11} - \lambda)v_1 + \lambda_{12}v_2 + \ldots + \lambda_{1n}v_n &= 0 \,, \\ \lambda_{21}v_1 + (\lambda_{22} - \lambda)v_2 + \ldots + \lambda_{2n}v_n &= 0 \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \,, \\ \lambda_{n1}v_1 + \lambda_{n2}v_2 + \ldots + (\lambda_{nn} - \lambda)v_n &= 0 \,, \end{aligned} \tag{9*}$$

ekvivalentních s maticovou rovnicí (9), má za situace (8*) netriviální (= nenulové) řešení, takže vlastní vektory pro každé vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ matice Λ existují.

[2]) Připomeňme, že když L znamená lineární formu příslušnou k matici Λ, lze $\mathsf{L}(\mathsf{x})$ psát i jako maticový součin $\Lambda\mathsf{x}$.

Platí však ještě další tvrzení:

(11) *Je-li matice Λ symetrická a je-li λ kořen násobnosti m rovnice* (8), *existuje m navzájem ortogonálních vlastních vektorů příslušných k λ.*

Ani toto tvrzení nebudeme dokazovat, protože je nebudeme (pro obecné n) potřebovat; plyne z dobře známé věty, podle níž je za uvedených předpokladů množina všech řešení soustavy (9*) lineární prostor dimenze m. Z tvrzení (11) a z věty 12 okamžitě plyne, že

(12) *pro každou symetrickou matici Λ existuje ortonormální báze složená z jejích vlastních vektorů.*

Následující věta podává příklad ortogonálních bází, v nichž má daná kvadratická forma diagonální tvar; poskytuje zároveň – aspoň teoretický – návod, jak takovou bázi najít. Připomeňme ještě, že z ortogonální báze dostaneme bázi ortonormální, vydělíme-li každý element báze jeho normou.

Věta 13. *Je-li ortogonální báze $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ unitárního prostoru X složena z vlastních vektorů symetrické matice Λ a je-li L lineární forma příslušná k matici Λ, má kvadratická forma* (6) *v této bázi diagonální tvar.*

Podrobněji: Je-li

$$\Lambda f_k = \lambda_k f_k \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

má kvadratická forma tvar

$$K(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\| f_k^2 \right\| x_k^2 . \tag{14}$$

Je-li báze $\mathfrak{F}$ ortonormální, platí (7).

Důkaz. Pro každé $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ platí podle (6) a (13) rovnosti

$$\begin{aligned} K(x) = (\Lambda x \cdot x) &= \Big(\Lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \Lambda f_k \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k f_k \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_k x_k x_j \delta_{kj} \, \| f_k \| \, \| f_j \| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\| f_k^2 \right\| x_k^2 ; \end{aligned}$$

má-li každý z vektorů f_k normu 1, není nutné ji v posledních dvou součinech psát.

Poznámka 15. To, co jsme dosud v této kapitole řekli, dává možnost „aspoň teoreticky“ převést každou kvadratickou formu na diagonální tvar. Postup ovšem ve většině případů narazí na nepřekonatelné „praktické“ potíže. Přesto krátce naznačíme jeho možné etapy:

1) Vyřešíme charakteristickou rovnici (8); zde se patrně setkáme s první „praktickou“ potíží. Rovnice je n-tého stupně a obecné rovnice n-tého stupně dovedeme řešit jen pro $n = 1$ (kdy každá kvadratická forma má diagonální tvar) a pro $n = 2$; je-li $n > 2$, řešení asi nenajdeme, nepodaří-li se nám „uhádnout“ jeden nebo více kořenů a dělením příslušnými kořenovými činiteli stupeň rovnice dostatečně snížit.

2) Známe-li všechny kořeny rovnice (8) [3]), vyřešíme postupně všechny homogenní soustavy rovnic (9*); má-li kořen násobnost m, bude třeba podle (11) nalézt m ortogonálních řešení příslušné soustavy. Ortogonalitou vlastních vektorů odpovídajících *různým* kořenům rovnice (8) se nemusíme zabývat, protože ji zaručuje věta 12.

3) Pokud se nám podaří splnit bod 2), získáme ortogonální bázi složenou z vlastních vektorů – označme ji $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Pak již stačí užít větu 13.

4) Přechod od báze $\mathfrak{E}$ k bázi $\mathfrak{F}$ znamená přechod od jednoho systému souřadnic k jinému systému; budeme asi preferovat ortonormální báze $\mathfrak{F}$, protože se při přechodu nemění vzdálenosti dvojic bodů ani míry úhlů. [4]) Máme však dvě možnosti:

α) Pracovat s ortogonální bází (což může numerickou stránku výpočtů někdy zjednodušit) a teprve do nalezení diagonálního tvaru (14) dělit čtverci norem a tím získat tvar (7).

---

[3]) Podle (10) jsou všechny reálné.

[4]) Nedochází tak k deformaci geometrických útvarů, které s kvadratickou formou souvisejí; kdybychom např. na souřadnicových osách v $\mathbb{R}^2$ dovolili různá „měřítka“, nerozeznali bychom kružnice od elips.

β) Již od začátku pracovat s ortonormální bází $\mathfrak{F}$, což vede přímo k (7). V obou případech budou souřadnice x_k, $k = 1, \dots, n$ bodů v bázi $\mathfrak{E}$ se souřadnicemi ξ_k v bázi $\mathfrak{F}$ vázány maticovou rovnicí tvaru $\mathsf{x} = M^T \underline{\xi}$, kde M je matice typu $n \times n$, jejíž vlastnosti popisuje věta 8 spolu s poznámkou 11. V případě, že báze $\mathfrak{F}$ je ortonormální, je (podle věty 8) matice M *ortogonální*.

Úmluva. Nebude-li výslovně řečeno něco jiného, budou v dalších příkladech x_k vždy složky vektoru x v bázi $\mathfrak{E} = \{\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n\}$; budeme hledat bázi $\mathfrak{F}$, v níž má vektor x složky ξ_k. $\square$

Příklad 13. Kvadratickou formu $K(x_1, x_2) := x_1 x_2$ v $\mathbb{R}^2$ převedeme na diagonální tvar substitucí

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2\,, \quad x_2 = \xi_1 + \xi_2\,; \tag{15}$$

výsledkem bude forma $\xi_1^2 - \xi_2^2$.

Podle toho, co jsme řekli v poznámkách 11 a 14, odpovídá tato substituce přechodu od báze složené z vektorů $\mathsf{e}_1 = (0,1)$, $\mathsf{e}_2 = (1,0)$ k bázi složené z vektorů $\mathsf{f}_1 = \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 = (1,1)$, $\mathsf{f}_2 = -\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 = (-1,1)$. Protože determinant matice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

je kladný, je nová báze kladná. Protože řádky matice jsou ortogonální, je nová báze ortogonální; není ovšem ortonormální, protože $\|\mathsf{f}_1\| = \|\mathsf{f}_2\| = \sqrt{2}$. Abychom dostali ortonormální bázi, musíme dělit vektory $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ touto normou. Tím se transformační rovnice (15) změní na

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\xi_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\xi_2\,, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\xi_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\xi_2\,, \tag{15*}$$

což lze napsat i ve tvaru

$$x_1 = \xi_1 \cos\alpha - \xi_2 \sin\alpha\,, \quad x_2 = \xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \cos\alpha\,, \tag{16}$$

kde $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ (sr. s příkladem 12). To znamená, že se souřadnicová soustava otočila o 45°.

Příklad 14. Převeďme na diagonální tvar kvadratickou formu

$$6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2\,. \tag{17}$$

Protože této formě přísluší matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

budeme hledat kořeny rovnice

$$\det(\Lambda - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0\,;$$

snadno zjistíme, že kořeny, tedy vlastní čísla matice Λ, jsou 7 a 2.

Nyní bychom měli hledat vlastní vektory odpovídající těmto vlastním číslům, tj. řešit maticové rovnice $(\Lambda - 7E)\mathsf{v} = 0$, $(\Lambda - 2E)\mathsf{w} = 0$. Obě právě napsané matice však mají determinant nulový, takže u obou matic jsou řádky lineárně závislé. Máme tedy ve skutečnosti řešit rovnice

$$-v_1 + 2v_2 = 0\,, \quad 4w_1 + 2w_2 = 0\,.$$

První z nich má např. řešení $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, druhou ani nepotřebujeme řešit (ačkoli je to jednoduché), protože víme, co má vyjít: vektor kolmý k vektoru $\mathsf{v} = (v_1, v_2) = (2,1)$. Takové vektory však se najdou velmi snadno; dáme přitom přednost těm, pro něž je výsledná báze souhlasně orientovaná s bází původní, tedy kladná, protože za základní považujeme bázi $\mathfrak{E}$. Vyhovuje tedy např. vektor $\mathsf{w} = (-1,2)$; determinant, v jehož prvním resp. ve druhém řádku je v resp. w, je roven 5 (což je kladné číslo). [5])

Nová báze, v níž bude mít kvadratická forma (17) diagonální tvar, bude tedy složena z vektorů $\mathsf{f}_1 = \mathsf{v} = (2,1)$, $\mathsf{f}_2 = \mathsf{w} = (-1,2)$. Tomu podle poznámky 11 odpovídají transformační rovnice

$$x_1 = 2\xi_1 - \xi_2\,, \quad x_2 = \xi_1 + 2\xi_2\,. \tag{18}$$

---

[5]) Je vhodné uvědomit si obecně platnou souvislost: Je-li $\mathsf{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ a klademe-li $\mathsf{w} := (-v_1, v_2)$, je $\{\mathsf{v}, \mathsf{w}\}$ kladná ortogonální báze, protože determinant, jehož prvním řádkem je v, druhým řádkem w, má hodnotu $v_1^2 + v_2^2 > 0$. Další výhodou této volby je rovnost $\|\mathsf{v}\| = \|\mathsf{w}\|$.

Dosadíme-li do (17), dostaneme po snadném výpočtu formu

$$35\xi_1^2 + 10\xi_2^2\,. \tag{19}$$

Nová báze je sice ortogonální, ale není ortonormální; ortonormální bázi dostaneme dělením vektorů původní báze příslušnými normami.[6]) Protože $\| f_1 \| = \| f_2 \| = \sqrt{5}$, nahradíme (18) rovnicemi

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2\xi_1 - \xi_2)\,, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\xi_1 + 2\xi_2)\,. \tag{18*}$$

Tím se forma (19) změní na

$$7\xi_1^2 + 2\xi_2^2\,, \tag{19*}$$

což samozřejmě zcela přesně odpovídá teorii: U čtverců nových souřadnic ξ_1, ξ_2 jsou příslušná vlastní čísla matice M.

Poznámka 16. Příklad 14 ukazuje, že postupujeme (jak tomu má být v matematice vždy) podle aktuálních okolností a bez zbytečných kroků. Jde-li nám jen o diagonální tvar formy (17), stačí najít vlastní čísla 7, 2 matice Λ a napsat přímo (19*). Chceme-li znát i souřadnicový systém, v němž má forma tvar (19*), vyřešíme např. rovnici $v_1 - 2v_2 = 0$, ale místo řešení rovnice $4w_1 + 2w_2 = 0$ napíšeme vektor ortogonální k nalezenému řešení (v_1, v_2) první rovnice – nejspíše tedy vektor $w = (-v_2, v_1)$. Nové souřadnicové osy vzniknou ze starých otočením o jistý úhel α; chceme-li jej znát, musíme (za situace z příkladu 14) vyřešit rovnice $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$. Řešení je např. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, což je přibližně 0.4636476 v obloukové míře a $26°33'54''$ ve stupních, minutách a vteřinách. $\square$

V následující kapitole budeme rovinné křivky druhého stupně (kuželosečky) klasifikovat mj. i podle $\operatorname{sgn}\lambda_1$, $\operatorname{sgn}\lambda_2$; podobná klasifikace se provádí i v případě obecného $n \in \mathbb{N}$, ale je nesrovnatelně komplikovanější v porovnání s případem $n = 2$. Je však zřejmé, že při permutaci souřadnic se čísla λ_k také permutují; klasifikace se proto neprovádí podle toho, jaké je $\operatorname{sgn}\lambda_k$ pro každé konkrétní k, ale podle *celkového počtu* kladných, záporných a nulových λ_k. Protože v n-rozměrném prostoru se v diagonálním tvaru formy vyskytuje právě n čísel λ_k, stačí vědět, kolik z nich je kladných a kolik záporných. Podobná klasifikace by byla ovšem zcela nesmyslná, kdyby tyto počty měly (pro danou formu $K(x)$) záviset na tom, jak byla tato forma převedena na diagonální tvar, tj. ve které bázi počítáme její koeficienty. Nezávislost počtu kladných a záporných znamének na takové bázi má tedy zcela zásadní význam a proto i své jméno:

Věta 15. (Zákon setrvačnosti kvadratických forem.) *Má-li daná kvadratická forma v $\mathbb{R}^n$ ve dvou ortonormálních bázích tvar*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 \quad \textit{resp.} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k^2\,, \tag{20}$$

je počet kladných resp. záporných koeficientů a_k roven počtu kladných resp. záporných koeficientů b_k.

D ů k a z . Protože při permutaci souřadnic se uvedené počty nemění, lze předpokládat, že souřadnice byly permutovány tak, že pro vhodná čísla $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$ je

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k > 0\,, \text{ je-li } 1 \leq k \leq p \\ a_k < 0\,, \text{ je-li } p+1 \leq k \leq p+q \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} b_k > 0\,, \text{ je-li } 1 \leq k \leq r \\ b_k < 0\,, \text{ je-li } r+1 \leq k \leq r+s \end{array} \right\}; \tag{21}$$

přitom ovšem je $p + q \leq n$, $r + s \leq n$, $a_k = 0$ pro $k > p + q$, $b_k = 0$ pro $k > r + s$.

Identitu $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k^2$ lze při tomto označení napsat ekvivalentně ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{p} a_k x_k^2 + \sum_{k=r+1}^{r+s} (-b_k)\,\xi_k^2 = \sum_{k=p+1}^{p+q} (-a_k)\,x_k^2 + \sum_{k=1}^{r} b_k \xi_k^2\,, \tag{22}$$

kde na obou stranách jsou u čtverců všech souřadnic kladné koeficienty. Máme dokázat, že $p = r$, $q = s$; protože důkazy obou rovností jsou zcela analogické, dokážeme jen první z nich, a to sporem.

[6]) Pokud mají oba vektory stejnou normu, je dělení jednodušší. Kromě toho pak užíváme na obou nových osách souřadnic stejné „měřítko“, takže geometrické útvary nejsou „deformovány“. Jen jejich „velikost“ v bázích $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{F}$ nemusí souhlasit; bude souhlasit teprve po přechodu k bázi ortonormální.

Předpokládejme, že $p < r$. Podle věty 8 a poznámky 11 existuje ortogonální matice

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

tak, že

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk}\xi_k \ \text{ pro } \ j = 1, \dots, n; \tag{24}$$

ukažme, že v $\mathbb{R}^n$ existuje nenulový vektor, pro nějž je

$$x_1 = \dots = x_p = \xi_{r+1} = \dots = \xi_n = 0. \tag{25}$$

Dosazením těchto podmínek do prvních p rovnic v (24) dostaneme homogenní soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{11}\xi_1 + \dots + \mu_{1r}\xi_r \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= \mu_{p1}\xi_1 + \dots + \mu_{pr}\xi_r \end{aligned} \tag{26}$$

p rovnic o $r > p$ neznámých $\xi_1, \dots, \xi_r$, která má podle vět známých z algebry řešení $(\xi_1, \dots, \xi_r) \neq (0, \dots, 0)$. Pak je ovšem i $\sum_{k=1}^{r} b_k\xi_k^2 > 0$, a doplníme-li r-rozměrný (nenulový) vektor $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ na n-rozměrný vektor tím, že položíme $\xi_{r+1} = \dots = \xi_n = 0$, dostaneme na levé straně identity (22) nulu, kdežto vpravo bude kladné číslo. Tento spor dokazuje, že nemůže být $p < r$; podobně se dokáže, že není $r < p$.

Tím je věta dokázána. $\square$

Pro ilustraci hlavního tématu této kapitoly uvedeme ještě příklad převedení kvadratické formy v $\mathbb{R}^3$ na diagonální tvar; zdlouhavé, ale jednoduché numerické výpočty svěříme přitom čtenáři.

Příklad 15. Kvadratické formě

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \tag{27}$$

přísluší matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

jejíž charakteristickou rovnicí je $\det(\Lambda - \lambda E) = \lambda(9 - \lambda^2) = 0$, takže vlastní čísla jsou -3, 0, 3. Odpovídají jim po řadě vlastní vektory

$$f_1 = (1, 2, -1), \quad f_2 = (-1, 1, 1), \quad f_3 = (1, 0, 1) \tag{29}$$

s normami $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. Maticí M přechodu od báze $\mathfrak{E}$ k nové bázi $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ je matice, jejímiž řádky jsou vektory f_1, f_2, f_3 [7]) a příslušné transformační rovnice

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3, \quad x_2 = 2\xi_1 + \xi_2, \quad x_3 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \tag{30}$$

odpovídají matici M^T k ní transponované. Dosadíme-li (30) do (27), dostaneme $-18\xi_1^2 + 6\xi_3^2$. [8]) Nalezená báze $\mathfrak{F}$ je ortogonální a kladná ($\det M = 6$), ale není ortonormální; k získání ortonormální báze je nutné dělit každý z vektorů f_k jeho normou, což odpovídá dodatečné transformaci

$$\eta_1 := \frac{\xi_1}{\sqrt{6}}, \quad \eta_2 := \frac{\xi_2}{\sqrt{3}}, \quad \eta_3 := \frac{\xi_3}{\sqrt{2}}, \tag{31}$$

po níž forma nabude konečného tvaru

$$3(-\eta_1^2 + \eta_3^2), \tag{32}$$

což samozřejmě přesně odpovídá teorii.

[7]) Obecně: Je-li (v $\mathbb{R}^n$) $f_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ji} e_i$ pro $j = 1, \dots, n$, je $\mu_{jk} = (f_j \cdot e_k) = (f_j)_k$ pro $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$.

[8]) Pokud jsme si jisti, že dosavadní výpočty jsou správné, není třeba dosazování skutečně provádět, protože výsledek plyne z teorie: U čtverce každé z nových proměnných ξ_k je součin příslušného vlastního čísla se čtvercem normy příslušného vlastního vektoru. Na druhé straně lze dosazením někdy odhalit nesprávnost předcházejících výsledků: Neodpovídá-li nalezený diagonální tvar formy teorii, je ve výpočtech chyba.

4. Kuželosečky

Definice. Kuželosečkou nazveme množinu všech bodů x roviny $\mathbb{R}^2$, jejichž kartézské souřadnice x_1, x_2 splňují rovnici tvaru

$$\Omega(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\,, \tag{1}$$

kde a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c jsou konstanty, přičemž

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0\,. \quad \square \tag{2}$$

Podmínka (2) znamená, že aspoň jeden z koeficientů u kvadratických výrazů x_1^2, x_1x_2, x_2^2 je nenulový, tj. že $\Omega(x_1, x_2)$ není lineární funkce. „Kvadratickou část“ výrazu $\Omega(x_1, x_2)$ označíme $K(x_1, x_2)$, tj. položíme

$$K(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\,. \tag{3}$$

K je (nenulová) kvadratická forma v $\mathbb{R}^2$.

Klasifikaci kuželoseček provedeme teprve po převedení formy $K(x_1, x_2)$ na diagonální tvar. Zopakujme, jak lze při tom postupovat:

1. Označme

$$\Lambda := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

matici příslušnou ke kvadratické formě K. Prvním naším úkolem je najít vlastní čísla této matice, tj. rozřešit rovnici

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0\,. \tag{5}$$

Protože její diskriminant

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \tag{6}$$

je nezáporný, má rovnice buď jeden dvojnásobný reálný kořen, nebo dva různé reálné kořeny.

2. Nyní je třeba najít vlastní vektory příslušné k nalezeným vlastním číslům matice (4), a to tak, aby tvořily kladnou ortonormální bázi. Rozeznávejme dvě situace:

2a. Rovnice (5) má dva různé kořeny λ_1, λ_2: Je-li $v = (v_1, v_2)$ resp. $w = (w_1, w_2)$ nějaký vlastní vektor příslušný kořenu λ_1 resp. λ_2, jsou vektory v, w ortogonální podle věty 12. Tuto podmínku bychom tedy nemuseli v dalším ověřovat, ale jak jsme již řekli v poznámce 15, postupujeme stejně trochu jinak: Najdeme např. nenulové řešení (v_1, v_2) rovnice $(a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0$ a položíme $v = (v_1, v_2)$, $w = (-v_2, v_1)$. Opakujme, že to má dvě výhody: 1) $\{v, w\}$ je kladná báze, 2) $\| v \| = \| w \|$.

Z obecné teorie je nám známo, že v bázi složené z vektorů v, w bude mít forma K diagonální tvar

$$\lambda_1 N^2 \eta_1^2 + \lambda_2 N^2 \eta_2^2\,, \quad \text{kde} \quad N := \| v \| = \| w \|\,. \tag{7}$$

Nám jde ovšem o volbu *ortonormální* báze, v níž má forma diagonální tvar; takovou bází je báze složená z vektorů $f_1 := v/N$, $f_2 := w/N$. Této změně „měřítka“ odpovídají nové souřadnice

$$\xi_1 = \frac{\eta_1}{N}\,, \quad \xi_2 = \frac{\eta_2}{N}$$

v bázi $\{f_1, f_2\}$, v nichž forma nabude tvaru

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2\,. \tag{8}$$

Jak víme z příkladu 12, souřadnice ξ_1, ξ_2 a x_1, x_2 jsou vázány vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cos\alpha - \xi_2 \sin\alpha\,, \\ x_2 &= \xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \cos\alpha\,, \end{aligned} \tag{9}$$

kde α znamená úhel sevřený vektory e_1, f_1, tedy *úhel otočení* [1]) původní soustavy souřadnicových os.

[1]) „V kladném smyslu“, tj. „ve směru otáčení hodinových ručiček“.

Dosadíme-li (9) do (1), dostaneme popis téže kuželosečky v nových souřadnicích, v nichž bude mít „kvadratická část" diagonální tvar:

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma = 0\,. \tag{10}$$

Aspoň jedno z čísel α_{11} $(= \lambda_1)$, α_{22} $(= \lambda_2)$ je přitom nenulové, protože v opačném případě by byla pravá strana (10) lineární a substitucí inverzní k (9) by musela vyjít lineární funkce v proměnných x_1, x_2, což by byl spor. Ze zákona setrvačnosti kvadratických forem navíc plyne, že ať již původní forma K byla převedena na diagonální tvar jakkoli (tedy třeba i jinak, než jsme uvedli), je počet kladných, záporných a nulových koeficientů u čtverců souřadnic stejný jako v našem případě. Podle těchto počtů je tedy možné kuželosečky klasifikovat bez obav, že by klasifikace mohla záviset na volbě souřadnicového systému.

2b. V případě, že rovnice (4) má jeden dvojnásobný kořen λ_0, má tato rovnice tvar $(\lambda - \lambda_0)^2 = 0$. Porovnáním koeficientů v identitě

$$\lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \tag{11}$$

dostaneme rovnosti

$$2\lambda_0 = a_{11} + a_{22}\,, \quad \lambda_0^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,,$$

z nichž dále plyne, že

$$4\lambda_0^2 = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,,$$

tedy že

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0\,. \tag{12}$$

To však je pravda tehdy a jen tehdy, když je $a_{11} = a_{22}$ a zároveň $a_{12} = 0$; v tomto případě tedy není nutná žádná transformace souřadnic, protože již *původní forma K má diagonální tvar*. Abychom však i v dalším mohli vyšetřovat obě situace najednou, pišme $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$; označíme-li ještě $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = b_2$, $\gamma = c$, dostaneme i za situace 2b rovnici (10).

3. Rozeberme nyní všechny možnosti, které mohou nastat, má-li daná kuželosečka popis (10):

3a. Případ $\alpha_{11} \neq 0 \neq \alpha_{22}$: Pak lze rovnici (10) upravit na tvar

$$\alpha_{11}\Big(\xi_1 + \frac{\beta_1}{2\alpha_{11}}\Big)^2 + \alpha_{22}\Big(\xi_2 + \frac{\beta_2}{2\alpha_{22}}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{\beta_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_{22}} - 4\gamma\Big); \tag{13}$$

položíme-li

$$\eta_1 = \xi_1 + \frac{\beta_1}{2\alpha_{11}}\,, \quad \eta_2 = \xi_2 + \frac{\beta_2}{2\alpha_{22}}\,, \tag{14}$$

což znamená posunutí počátku souřadnicového systému, dostaneme rovnici

$$\alpha_{11}\eta_1^2 + \alpha_{22}\eta_2^2 = \rho\,, \tag{15}$$

kde

$$\rho := \frac{1}{4}\Big(\frac{\beta_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_{22}} - 4\gamma\Big). \tag{16}$$

Aby se zmenšil počet logicky možných případů, proveďme ještě tuto úpravu: Je-li $\rho \geq 0$, ponechme rovnici (15) beze změn; je-li však $\rho < 0$, změňme znaménka obou jejích stran. Pak bude pravá strana rovnice (15) v obou případech nezáporná, takže ji lze napsat ve tvaru R^2, kde $R \geq 0$. Rovnice sama bude mít tvar

$$A_{11}\eta_1^2 + A_{22}\eta_2^2 = R^2\,, \tag{17}$$

kde

$$A_{11} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ -\alpha_{11} \end{Bmatrix}, \; A_{22} = \begin{Bmatrix} \alpha_{22} \\ -\alpha_{22} \end{Bmatrix}, \; \text{je-li} \; \begin{Bmatrix} \rho \geq 0 \\ \rho < 0 \end{Bmatrix}. \tag{18}$$

Jsou možné tyto případy:

3aa. $A_{11} < 0$, $A_{22} < 0$, $R > 0$; pak je množina popsaná rovnicí (17) prázdná.

3ab. $A_{11} < 0$, $A_{22} < 0$, $R = 0$; pak je množina (17) jednobodová a obsahuje jen počátek $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$.

3ac. $A_{11} > 0$, $A_{22} > 0$, $R = 0$; pak je množina (17) opět jednobodová a obsahuje jen počátek $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$.

3ad. $A_{11} > 0$, $A_{22} > 0$, $R > 0$; pak lze (17) přepsat na tvar

$$\left(\frac{\eta_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{A_2}\right)^2 = 1\,, \text{ kde } A_1 := \frac{R}{\sqrt{A_{11}}}\,,\ A_2 := \frac{R}{\sqrt{A_{22}}}\,. \tag{19}$$

Podle toho, zdali je $A_1 = A_2$ nebo $A_1 \neq A_2$, popisuje (19) kružnici (o středu v počátku a poloměru $A_1 = A_2$) nebo elipsu (o středu v počátku a délce poloos A_1, A_2).

3ae. $A_{11} > 0$, $A_{22} < 0$, $R = 0$; pak (17) platí právě tehdy, když je

$$\eta_2 = \pm\sqrt{-\frac{A_{11}}{A_{22}}}\,\eta_1\,, \tag{20}$$

což znamená, že kuželosečka je nyní dvojicí různoběžných přímek procházejících počátkem.

3af. $A_{11} < 0$, $A_{22} > 0$, $R = 0$ je případ, který vznikne z případu 3ae vzájemnou záměnou souřadnic a koeficientů A_{11}, A_{22}.

3ag. $A_{11} > 0$, $A_{22} < 0$, $R > 0$; pak lze analogicky jako v případě 3ad psát

$$\left(\frac{\eta_1}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{\eta_2}{A_2}\right)^2 = 1\,, \text{ kde } A_1 := \frac{R}{\sqrt{A_{11}}}\,,\ A_2 := \frac{R}{\sqrt{-A_{22}}}\,. \tag{21}$$

Tato rovnice popisuje hyperbolu o středu v počátku a délce poloos A_1, A_2. Hyperbola protíná první osu souřadnicovou (kde $\eta_2 = 0$) v bodech $\pm A_1$; druhou osu neprotíná. Je-li $A_1 = A_2$, jde o *rovnoosou* hyperbolu.

3ah. $A_{11} < 0$, $A_{22} > 0$, $R > 0$ je případ, který vznikne z případu 3ag vzájemnou záměnou souřadnic a koeficientů A_{11}, A_{22}. Nyní se tedy jedná o hyperbolu, která protíná druhou souřadnicovou osu, zatímco první osu neprotíná. $\square$

Abychom viděli, že jsme nic nevynechali, uveďme ještě přehlednou tabulku:

A_{11}	A_{22}	R	případ	rovnice (17) popisuje
< 0	< 0	> 0	**3aa**	prázdnou množinu
< 0	< 0	$= 0$	**3ab**	jednobodovou množinu $\{(0,0)\}$
> 0	> 0	$= 0$	**3ac**	jednobodovou množinu $\{(0,0)\}$
> 0	> 0	> 0	**3ad**	kružnici nebo elipsu
> 0	< 0	$= 0$	**3ae**	dvojici různoběžek
< 0	> 0	$= 0$	**3af**	dvojici různoběžek
> 0	< 0	> 0	**3ag**	hyperbolu
< 0	> 0	> 0	**3ah**	hyperbolu

3b. Buď nyní $\alpha_{11} \neq 0 = \alpha_{22}$; pak lze rovnici (10) přepsat na tvar

$$\alpha_{11}\left(\xi_1 + \frac{\beta_1}{2\alpha_{11}}\right)^2 = -\beta_2\xi_2 + \frac{\beta_1^2}{4\alpha_{11}} - \gamma\,; \tag{22}$$

dělíme-li číslem α_{11} a položíme-li

$$A = \frac{\beta_1}{2\alpha_{11}}\,,\ B = -\frac{\beta_2}{\alpha_{11}}\,,\ C = \frac{\beta_1^2 - 4\alpha_{11}\gamma}{\alpha_{11}^2}\,,\ \eta_1 = \xi_1 + A\,,\ \eta_2 = \xi_2\,, \tag{23}$$

posunuli jsme počátek ve směru první osy a dostáváme rovnici

$$\eta_1^2 = B\eta_2 + C\,. \tag{24}$$

Jsou možné tyto případy:

3ba. $B = C = 0$; rovnici (24) pak splňují právě všechny body s $\eta_1 = 0$, tj. právě všechny body druhé souřadnicové osy.

3bb. $B = 0$, $C < 0$; rovnici (24) nesplňuje žádný bod.

3bc. $B = 0$, $C > 0$; rovnici (24) splňují právě všechny body ležící na rovnoběžkách $\eta_1 = \pm\sqrt{C}$ s druhou souřadnicovou osou.

3bd. $B \neq 0$; pak je rovnice (24) ekvivalentní s rovnicí

$$\eta_1^2 = B\Big(\eta_2 + \frac{C}{B}\Big), \tag{25}$$

která popisuje parabolu s vrcholem v bodě $(0, -C/B)$, jejíž osou je druhá osa souřadnicová; je umístěna „vrcholem dolů" nebo „vrcholem nahoru" podle toho, zdali je $B > 0$ nebo $B < 0$. Vrcholem paraboly s popisem (22) je bod

$$\Big(-A, -\frac{C}{B}\Big) = \Big(-\frac{\beta_1}{2\alpha_{11}}, \frac{\beta_1^2 - 4\alpha_{11}}{\alpha_{11}\beta_2}\Big). \tag{26}$$

Místo tabulky bude jistě nyní stačit toto shrnutí:

Résumé. Rovnice (10) popisuje v případě, že $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} = 0$, buď prázdnou množinu (případ 3bb), nebo rovnoběžku s druhou souřadnicovou osou (případ 3ba), nebo dvojici různých rovnoběžek s druhou souřadnicovou osou (případ 3bc), nebo parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s druhou souřadnicovou osou (případ 3bd).

3c. Případ $\alpha_{11} = 0 \neq \alpha_{22}$ je zcela analogický případu 3b a lze jej na tento případ převést vzájemnou záměnou souřadnicových os. $\square$

Proveďme klasifikaci kuželoseček ještě jednou, ale obráceně v tom smyslu, že vyjdeme z jejich nejjednodušších rovnic; pro body v rovině přitom užívejme označení $z = (x, y)$, čísla a a b nechť jsou v dalším kladná, čísla x_0 a y_0 libovolná.

A. Kružnice o středu v počátku resp. v bodě (x_0, y_0) a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ má rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{resp.} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{27}$$

B. Elipsa o středu v počátku resp. v bodě (x_0, y_0) a délkách poloos a, b má rovnici

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1 \quad \text{resp.} \quad \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 = 1. \tag{28}$$

Kružnici považujeme za speciální případ elipsy ($a = b = r$); kdybychom „elipsou" chtěli rozumět „elipsu, která není kružnicí", museli bychom zde navíc předpokládat, že $a \neq b$.

C. Hyperbola o středu v počátku resp. v bodě (x_0, y_0) a délkách poloos a, b má rovnici

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 - \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1 \quad \text{resp.} \quad \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 - \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 = 1. \tag{29}$$

První z těchto hyperbol protíná osu x v bodech $\pm a$; osu y neprotíná. Hyperbola

$$\Big(\frac{y}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 = 1 \quad \text{resp.} \quad \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 = 1 \tag{29*}$$

vznikla vzájemnou výměnou souřadnicových os z hyperboly (29).

D. Dvojici různoběžek, které se protínají v počátku resp. v bodě (x_0, y_0), lze popsat kvadratickými rovnicemi tvaru

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 = \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 \quad \text{resp.} \quad \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 = \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2, \tag{30}$$

které lze napsat i ve tvaru podobném (29), kde je však na pravé straně 0 místo 1. Jedná se o přímky

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \text{resp.} \quad y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0), \tag{30*}$$

které nejsou rovnoběžné s osami souřadnic [2]); s vodorovnou osou svírají tyto přímky úhel $\pm \operatorname{arctg}(b/a)$.

E. Dvojici různých rovnoběžek s osou x lze v kvadratickém tvaru popsat rovnicemi

$$y^2 = b^2 \quad \text{resp.} \quad (y - y_0)^2 = b^2\,; \tag{31}$$

pokud bychom v těchto rovnicích nahradili číslo $b \in \mathbb{R}_+$ nulou, popisovaly by tyto rovnice **osu x** resp. **rovnoběžku s osou x**.

Podobně je to s **dvojicí různých rovnoběžek s osou y**; popisuje je rovnice

$$x^2 = a^2 \quad \text{resp.} \quad (x - x_0)^2 = a^2\,; \tag{32}$$

pokud bychom v těchto rovnicích nahradili číslo $a \in \mathbb{R}_+$ nulou, popisovaly by tyto rovnice **osu y** resp. **rovnoběžku s osou y**.

F. Parabola se svislou osou se dá popsat rovnicí

$$y = \pm 2ax^2 \quad \text{resp.} \quad y = y_0 \pm 2a(x - x_0)^2\,; \tag{33}$$

znaménko plus resp. minus parabole „s vrcholem dolů“ resp. „s vrcholem nahoru“. **Ohniskem** paraboly je v prvním případě bod $(0, \pm a)$, ve druhém případě bod $(x_0, y_0 \pm a)$. **Řídící přímka** má rovnici $y = \mp a$ resp. $y = y_0 \mp a$. **Vrcholem** paraboly je v prvním případě počátek, ve druhém případě bod (x_0, y_0).

Parabola s vodorovnou osou má rovnici

$$x = \pm 2by^2 \quad \text{resp.} \quad x = x_0 \pm 2b(y - y_0)^2\,; \tag{33*}$$

znaménko plus resp. minus odpovídá parabole „s vrcholem vlevo“ resp. „s vrcholem vpravo“). **Ohniskem** je nyní bod $(\pm b, 0)$ resp. $(x_0 \pm b, y_0)$, **řídící přímka** má rovnici $x = \mp b$ resp. $x = x_0 \mp b$, **vrcholem** je počátek resp. bod (x_0, y_0).

G. Jednobodová množina $(0, 0)$ resp. (x_0, y_0) se dá popsat kvadratickou rovnicí

$$ax^2 + by^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 = 0\,. \tag{34}$$

H. Prázdná množina se dá popsat kvadratickou rovnicí

$$ax^2 + by^2 = -\rho \quad \text{resp.} \quad a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 = -\rho\,, \tag{35}$$

kde $\rho \in \mathbb{R}_+$. □

Připomeňme ještě další běžně užívanou terminologii:

Definice. Říkáme, že body $z' = (x', y')$, $z'' = (x'', y'')$ jsou **symetrické vzhledem k přímce** P, je-li buď $z' = z'' \in P$, nebo je $z' \neq z''$, přímka procházející body z', z'' je kolmá k přímce P, oba body mají od P stejnou vzdálenost a leží v různých polorovinách určených touto přímkou.

Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^2$ je **symetrická vzhledem k přímce** P, leží-li v M spolu s každým bodem z' i bod z'' symetrický se z' vzhledem k P; přímku P pak nazýváme **osou symetrie** (nebo krátce **osou**) množiny M.

Má-li M nějakou osu symetrie, říkáme, že je **osově symetrická**.

Definice. Říkáme, že body $z' = (x', y')$, $z'' = (x'', y'')$ jsou **symetrické vzhledem k bodu** $z_0 = (x_0, y_0)$, je-li

$$\tfrac{1}{2}(x' + x'') = x_0\,, \quad \tfrac{1}{2}(y' + y'') = y_0\,. \quad \square$$

Jinými slovy, ze dvou bodů z', z'' symetrických vzhledem k bodu z_0 má jeden tvar $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, druhý tvar $(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)$, kde $\Delta x \in \mathbb{R}$, $\Delta y \in \mathbb{R}$ jsou vhodná čísla.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá **symetrická vzhledem k bodu** z_0, obsahuje-li spolu s každým bodem z' i bod z'' s ním symetrický vzhledem k bodu z_0; každý takový bod z_0 budeme nazývat **střed symetrie** množiny M.

Má-li množina M (aspoň jeden) střed symetrie, nazývá se **středově symetrická**.

Má-li kuželosečka K *právě jeden* střed symetrie, nazývá se **středová** a (její jediný) střed symetrie se nazývá krátce **střed** této kuželosečky. Říkáme, že kuželosečka je **nestředová**, není-li středová. [3])

---

[2]) Stále předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$.

[3]) To znamená, že buď nemá žádný střed symetrie, nebo má více než jeden střed symetrie.

Poznámka 17. Jak snadno nahlédneme, platí tato tvrzení:

α) *Každá kuželosečka je osově symetrická.* Kružnice, jednobodové množiny a $\emptyset$ mají nekonečně mnoho os symetrie, paraboly a rovnoběžky právě jednu, ostatní kuželosečky (tj. elipsy, které nejsou kružnicemi, hyperboly a dvojice různoběžek) právě dvě.

β) *Středově symetrické nejsou jen paraboly; středové jsou elipsy (včetně kružnic), hyperboly, dvojice různoběžek a jednobodové množiny.* Dvě rovnoběžky a $\emptyset$ mají nekonečně mnoho středů symetrie. $\square$

Definice. Elipsy, hyperboly a paraboly jsou tzv. **pravé** neboli **nedegenerované kuželosečky**; ostatní kuželosečky popsané v bodech A – H se nazývají **degenerované**.

Definice. Hlavním směrem kuželosečky budeme rozumět směr (každé) její osy symetrie a směr k němu kolmý.

Poznámka 18. Jak je patrné, postup převedení kvadratické funkce (1) na tvar neobsahující „smíšený člen“ $2a_{12}x_1x_2$ začínal nalezením hlavních směrů příslušné kuželosečky. Pak jsme – kromě případu, že šlo o kružnici, jednobodovou nebo prázdnou množinu, pro něž je každý směr směrem hlavním – souřadnicový systém otočili tak, aby směr nových os splýval s hlavními směry příslušné kuželosečky. Za této situace je již snadné najít střed středové kuželosečky. V případě paraboly a dvou rovnoběžek mělo otočení za následek, že se jejich jediná osa symetrie stala rovnoběžnou s některou z nových souřadnicových os; v případě paraboly lze pak již snadno najít její ohnisko, řídící přímku i vrchol.

Potřebujeme-li znát střed, ohnisko, směr osy symetrie, apod. kuželosečky v původním souřadnicovém systému, stačí provést transformaci inverzní k (9), neboli transformaci

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha\,, \\ \xi_2 &= -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha\,. \quad \square \end{aligned} \tag{9*}$$

Následující tři příklady by měly čtenáři ukázat postup, jímž lze rozhodnout, jakou kuželosečku popisuje rovnice $\Omega(x, y) = 0$, je-li kvadratická funkce Ω konkrétně dána. Některé jednoduché numerické detaily výpočtů přenecháme čtenáři.

První vlastní vektor zvolíme vždy tak, aby obě jeho složky byly kladné; rotace pak bude (podle první řádky v (9*)) *„v kladném smyslu“ o úhel v rozmezí* $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Příklad 16. Je-li

$$\Omega(x, y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 5y\,, \tag{36}$$

má příslušná matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \tag{37}$$

charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$, a tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 10$ a $\lambda_2 = 5$. Řešením rovnice $(9 - \lambda_1)v_1 + 2v_2 = 0$ je např. vektor $\mathsf{v} = (v_1, v_2) = (2, 1)$; druhým vlastním vektorem matice Λ je např. $\mathsf{w} := (-1, 2)$ (k vektoru v kolmý). Maticí přechodu od báze $\mathfrak{E} = \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\}$ ke kladné bázi $\{\mathsf{v}, \mathsf{w}\}$ je proto matice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Protože oba vlastní vektory mají normu $N = \sqrt{5}$, je M/N maticí přechodu k ortonormální bázi složené z vektorů $\mathsf{f}_1 := \mathsf{v}/N$, $\mathsf{f}_2 := \mathsf{w}/N$. Provedeme-li v rovnici $\Omega(x, y) = 0$ substituci

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\xi - \eta)\,, \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\xi + 2\eta) \tag{39}$$

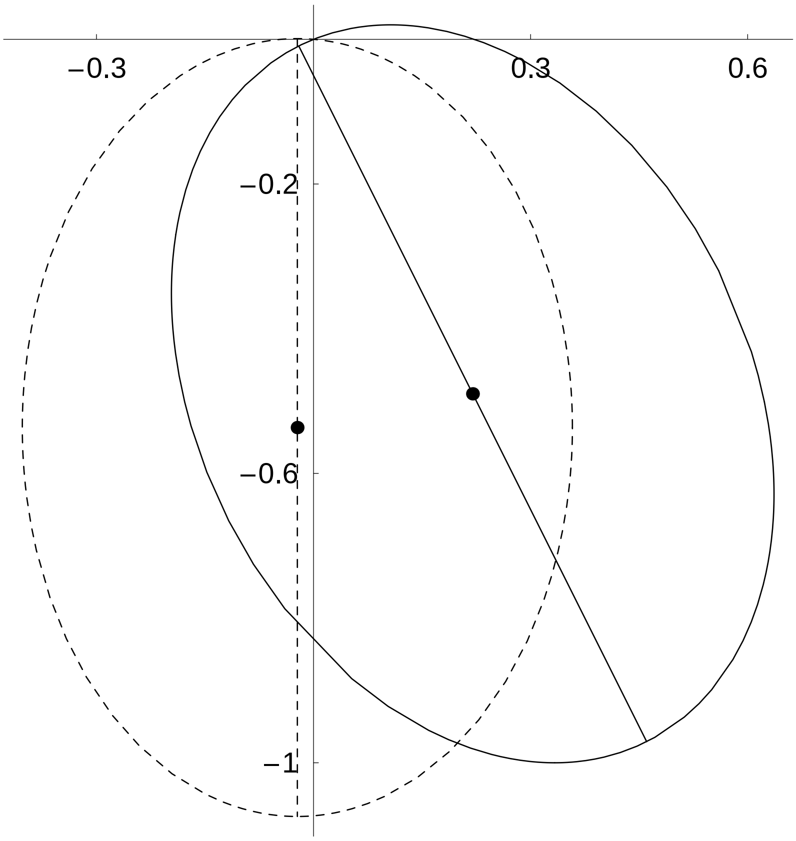
(kde koeficienty jsou řádky transponované matice M^T/N, neboli sloupce matice M/N), dostaneme rovnici

$$10\xi^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\xi + 5\eta^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}\eta = 0\,, \tag{40}$$

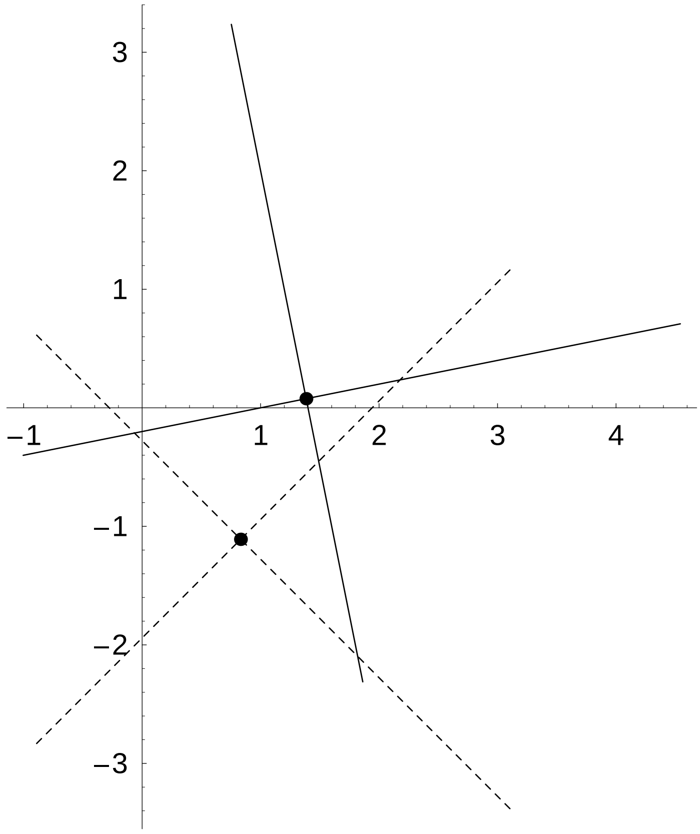
kterou upravíme na tvar

$$2000\Big(\xi + \frac{1}{20\sqrt{5}}\Big)^2 + 1000\Big(\eta + \frac{6}{5\sqrt{5}}\Big)^2 = 289\,. \tag{41}$$

Tato rovnice popisuje elipsu o středu $(-1/(20\sqrt{5}, -6/(5\sqrt{5})) \doteq (-0.0224), -0.5367)$ a délce poloos $\sqrt{289/2000} \doteq 0.3801$, $\sqrt{289/1000} \doteq 0.5376$. Tato elipsa vznikla otočením původní elipsy o úhel $\operatorname{arctg}(1/2) \doteq 0.4636476$ v obloukové míře, tj. přibližně o $26°33'54.18''$; původní elipsa měla střed $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = (0.22, -0.49)$ (přesně). (Viz obrázek na další straně.)



K PŘÍKLADU 16



K PŘÍKLADU 17

Příklad 17. Je-li

$$\Omega(x,y) := -5x^2 + 24xy + 5y^2 + 12x - 34y - 7\,, \tag{42}$$

má matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \tag{43}$$

charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 169 = 0$, takže $\lambda_1 = 13$ a $\lambda_2 = -13$ jsou její vlastní čísla. Rovnice $(-5 - \lambda_1)v_1 + 12v_2 = 0$ má např. řešení $\mathsf{v} = (v_1, v_2) = (2,3)$, vektorem kolmým k v je např. vektor $\mathsf{w} = (-3, 2)$ a oba vektory mají normu $N = \sqrt{13}$. Maticí přechodu od báze $\mathfrak{E}$ k bázi $\{\mathsf{v}, \mathsf{w}\}$ je matice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Matici přechodu od báze $\mathfrak{E}$ k ortonormální bázi $\{\mathsf{v}/N, \mathsf{w}/N\}$ dostaneme dělením matice M číslem N. Abychom kvadratickou část funkce (42) převedli na diagonální tvar v této poslední bázi, provedeme transformaci

$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}\,(2\xi - 3\eta)\,, \quad y = \frac{1}{\sqrt{13}}\,(3\xi + 2\eta)\,; \tag{45}$$

koeficienty jsou řádky matice M^T/N, neboli sloupce matice M/N. Dosadíme-li to do rovnice $\Omega(x,y) = 0$, dostaneme (po úpravě)

$$\Big(\xi - \frac{3}{\sqrt{13}}\Big)^2 - \Big(\eta + \frac{4}{\sqrt{13}}\Big)^2 = 0\,; \tag{46}$$

tato rovnice má řešení

$$\eta = -\xi - \frac{1}{\sqrt{13}} \quad \text{a} \quad \eta = \xi - \frac{7}{\sqrt{13}}\,, \tag{47}$$

která popisují dvě navzájem kolmé přímky s průsečíkem $(3/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13}) \doteq (0.8321, -1.1094)$ a které svírají s osou ξ úhel $\mp\frac{1}{4}\pi$. Tato dvojice přímek vznikla z dvojice přímek popsaných rovnicí $\Omega(x,y) = 0$ otočením o úhel $\operatorname{arctg}(3/2) \doteq 0.9827937$, tedy přibližně o $56°\,18'\,35.76''$. (Viz obrázek na předcházející straně.)

Zjistit rovnice původních přímek lze (nejméně) dvěma způsoby:

1) Protože víme, že žádná z nich není kolmá k první souřadnicové ose, lze tyto přímky popsat rovnicemi tvaru $g(x,y) := y - a_1x - b_1 = 0$ a $h(x,y) := y - a_2x - b_2 = 0$, kde a_1, b_1, a_2, b_2 jsou zatím neznámá čísla. Najdeme je tak, že porovnáme koeficienty kvadratického polynomu $5\,g(x,y)\,h(x,y)$ s polynomem $F(x,y)$. Snadný výpočet přenecháme čtenáři; vyjde $a_1 = -5$, $a_2 = \frac{1}{5}$, $b_1 = 7$, $b_2 = -\frac{1}{5}$, takže přímky jsou popsány rovnicemi

$$y = -5x + 7 \quad \text{a} \quad y = \tfrac{1}{5}(x-1);$$

z toho snadno plyne, že se protínají v bodě $\left(\frac{18}{13}, \frac{1}{13}\right) \doteq (1.3846, 0.0769)$.

2) Z rovnic (45) vypočteme

$$\xi = \frac{2x + 3y}{\sqrt{13}}, \quad \eta = \frac{-3x + 2y}{\sqrt{13}},$$

dosadíme to do rovnic (47) a vypočteme z nich y. Výsledek bude samozřejmě stejný jako při užití první metody.

Příklad 18. Je-li

$$\Omega(x,y) = 16x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 2y, \tag{48}$$

má příslušná matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 17\lambda = 0$, tedy vlastní čísla 0 a 17. Vlastními vektory jsou např. $\mathsf{v} := (1,4)$ a $\mathsf{w} := (-4,1)$, jejich norma je $N := \sqrt{17}$. Maticí přechodu od báze $\mathfrak{E}$ k bázi složené z vektorů $\mathsf{f}_1 := \mathsf{v}/N$, $\mathsf{f}_2 := \mathsf{w}/N$ je matice

$$M = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

a substitucí

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}(\xi - 4\eta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\xi + \eta) \tag{51}$$

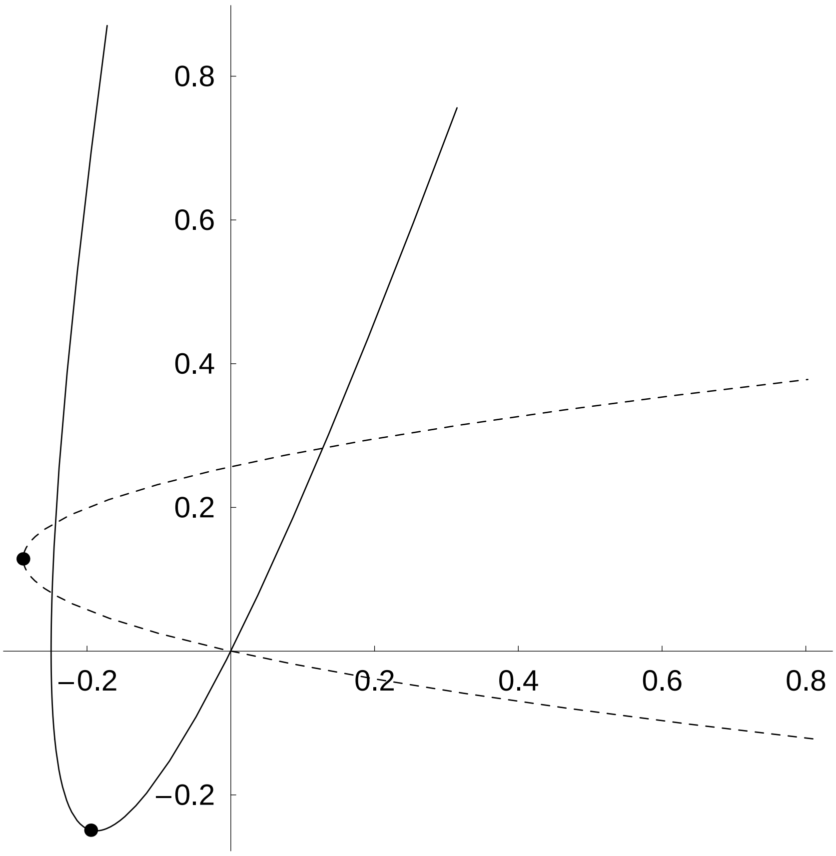
dostaneme z rovnice $\Omega(x,y) = 0$ rovnici

$$17\eta^2 - \frac{18}{\sqrt{17}}\,\eta = \frac{4}{\sqrt{17}}\,\xi, \tag{52}$$

kterou lze upravit na tvar

$$17\Big(\eta - \frac{9}{17\sqrt{17}}\Big)^2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\Big(\xi + \frac{81}{68\sqrt{17}}\Big). \tag{53}$$

Jedná se tedy o parabolu, která má v souřadnicovém systému ξ, η vodorovnou osu a vrchol vlevo v bodě $(-81/(68\sqrt{17}), 9/(17\sqrt{17})) \doteq (-0.2889, 0.1284)$; vznikla z původní paraboly otočením o úhel $\operatorname{arctg} 4 \doteq 1.3258177$, tedy přibližně o $75°\,57'\,49.52''$. Vrcholem paraboly s popisem $\Omega(x,y) = 0$ je bod $(-225/1156, -72/289) \doteq (-0.1946, -0.2491)$.



K PŘÍKLADU 18

Cvičení

Společným úkolem těchto cvičení je zjistit, jakou kuželosečku popisuje rovnice $\Omega(x,y)=0$, kde Ω je daná kvadratická funkce proměnných x, y. K tomu je třeba přejít k bázi, v níž má kvadratická část funkce $\Omega(x,y)$ diagonální tvar. Taková báze není samozřejmě jen jedna: hodí-li se báze $\{\mathsf{v},\mathsf{w}\}$, hodí se i báze $\{-\mathsf{v},\mathsf{w}\}$, $\{\mathsf{w},\mathsf{v}\}$, atd. *Aby řešitel mohl snadněji ověřit správnost svého výsledku, má v naší nabídce řešení první vektor* $\mathsf{v}=(v_1,v_2)$ *báze*, v níž má kvadratická část funkce $\Omega(x,y)$ diagonální tvar, *vždy, kdy to je možné,* [4]) *obě složky kladné*; *druhým vektorem báze je ve všech případech* $\mathsf{w}=(-v_2,v_1)$. Vektory v a w mají pak stejnou normu a příslušná báze je kladná. Souřadnicová soustava s bází $\{\mathsf{v}/\|\mathsf{v}\|,\mathsf{w}/\|\mathsf{w}\|\}$ vznikne ze souřadnicové soustavy s bází $\{\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2\}$ otočením o úhel $\alpha\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ v kladném smyslu.

V řešení nejsou uvedeny některé údaje, které by řešitel měl zjistit, aby se co nejlépe naučil ovládat výpočetní techniku a ve výsledných polohách kuželoseček se lépe orientoval; jsou to např. rovnice os kuželoseček, jejich sklon, ohniska parabol a rovnice řídících přímek, úhly sevřené různoběžkami, atd. U lineárních útvarů je vhodné zjišťovat i jejich popis v původní bázi $\{\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2\}$. Záleží jen na řešiteli, do jakých podrobností hodlá jít nebo co od něj examinátor požaduje.

Pro úsporu místa se ve výsledcích na následujících 30 stranách užívají poněkud nepřesná slovní spojení: např. místo „přímky popsané rovnicí $y=kx+q$“ se říká krátce „přímka $y=kx+q$“ nebo se místo o „hyperbole popsané rovnicí $\Omega(x,y)=0$“ mluví krátce o „hyperbole $\Omega(x,y)=0$“. Autor se omlouvá a doufá, že to nejen nepovede k nedorozumění, ale že si čtenář na takto krátká vyjádření příliš nezvykne.

Zjistěte, jakou kuželosečku popisuje rovnice $\Omega(x,y)=0$, je-li $\Omega(x,y)$ rovno

01. $-5x^2+24xy+5y^2+12x-34y-20$

02. $9x^2-4xy+6y^2-30x+2$

03. $13x^2-8xy+7y^2+20x-50y+86$

04. $12x^2+12xy+3y^2-85x-40y+152$

05. $3x^2-14xy+3y^2-18x+42y+27$

06. $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+12$

07. $7x^2+8xy+y^2-4x+2y-4$

08. $16xy+4x-28y-15$

09. $4xy+10x-10y-27$

10. $x^2+y^2+2x+10y-10$

11. $4x^2+4xy+y^2+5x-4$

12. $5x^2-6xy+5y^2-6x+18y+18$

13. $18x^2+8xy+12y^2-44x-52y+57$

14. $-2x^2-3xy+2y^2+7x-16y+30$

15. $2x^2+3xy-2y^2-2x-4y+5$

16. $66x^2-24xy+59y^2+12x+16y-23$

17. $9x^2-6xy+y^2+13x-y+3$

18. $8x^2+8xy+2y^2-13x-14y$

19. $3x^2-6xy+3y^2+10x-14y$

20. $11x^2-4xy+14y^2-18x-24y+25$

21. $x^2+8xy+16y^2-1$

22. $34x^2+24xy+41y^2-60x-80y+25$

23. $2x^2-72xy+23y^2-20x+110y$

24. $-5x^2-6xy+3y^2+8\sqrt{10}x-20$

25. $3x^2-3xy+7y^2+6\sqrt{10}x-8\sqrt{10}y+40$

26. $11x^2+4xy+14y^2-20x-20y+4$

27. $4x^2-4xy+y^2-2\sqrt{5}x+6\sqrt{5}y+15$

28. $5x^2-40xy+35y^2+16\sqrt{10}x-22\sqrt{10}y+30$

29. $-2x^2-4\sqrt{3}xy+2y^2+10x+6\sqrt{3}y-27$

30. $x^2+4xy+4y^2+2x+4y+1$

Na obrázcích ilustrujících řešení nebylo z technických důvodů vždy možné volit na obou osách stejné měřítko. Úhly na obrázku a tvar kuželosečky pak nemusí přesně odpovídat skutečnosti. Číselné údaje na osách však čtenáři dovolují aspoň přibližně určit měřítka na osách.

[4]) Bylo to možné ve všech případech s výjimkou příkladu 10.

Řešení

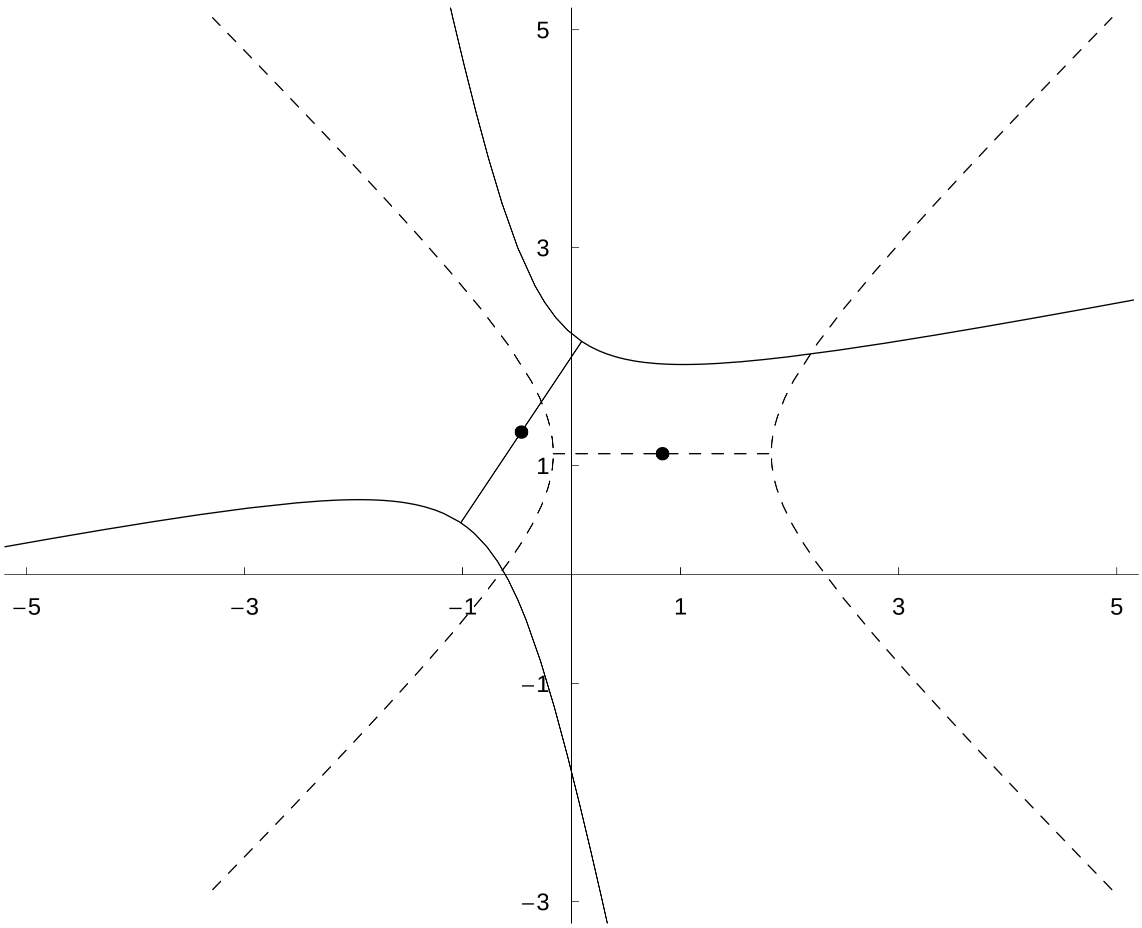
Cvičení 01. $\Omega(x,y) = -5x^2 + 24xy + 5y^2 + 12x - 34y - 20.$

Vlastní čísla: $(13, -13)$. Vlastní vektory: $(2,3)$, $(-3,2)$.

Rovnoosá hyperbola $\left(\xi - \frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\eta - \frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$ o středu $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}\right) \doteq (0.8321, 1.1094)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(-\frac{6}{13}, \frac{17}{13}\right) \doteq (-0.4615, 1.3077)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} \doteq 0.9827937$ v míře obloukové, tedy přibližně $56^\circ\, 18'\, 35.76''$.



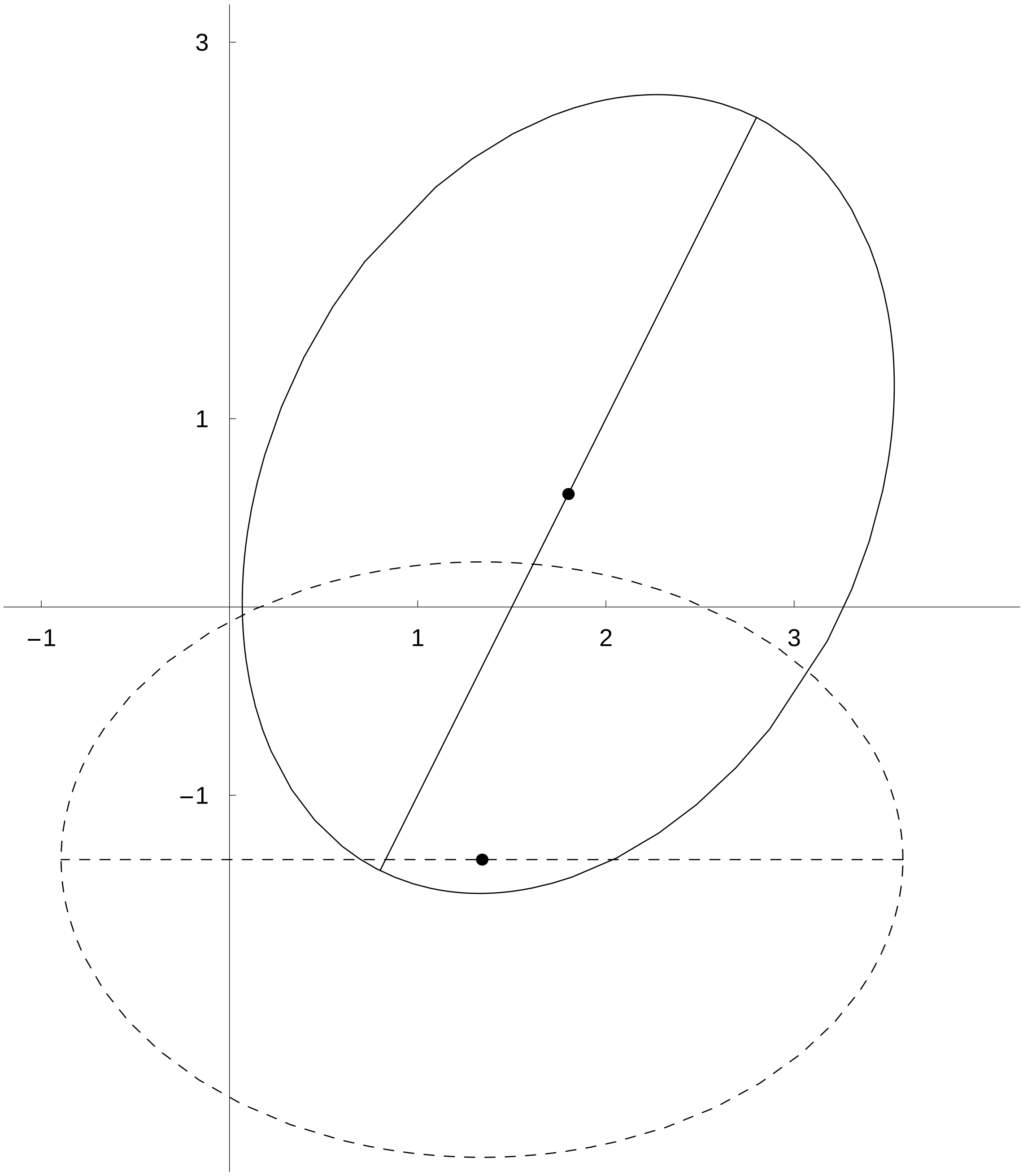
Cvičení 02. $\Omega(x,y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30x + 2.$

Vlastní čísla: $(5, 10)$. Vlastní vektory: $(1, 2)$, $(-2, 1)$.

Elipsa $\frac{1}{5}\Big(\xi - \frac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2 + \frac{2}{5}\Big(\eta + \frac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2 = 1$ o středu $\Big(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\Big) \doteq (1.3416, -1.3416)$.

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right) = (1.8, 0.6)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1.107149$ v míře obloukové, tedy přibližně $63^\circ\, 26'\, 5.82''$.



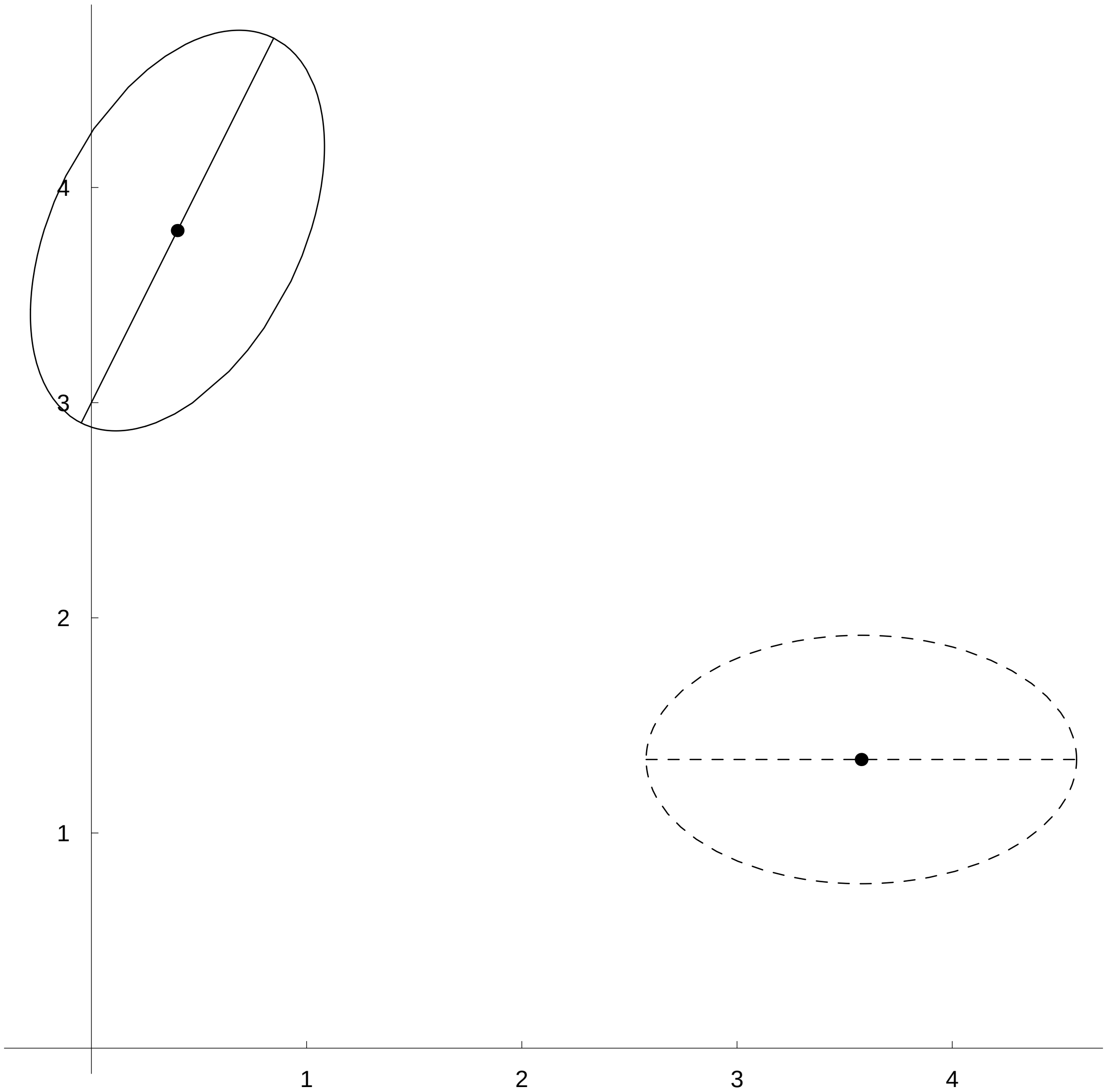
Cvičení 03. $\Omega(x,y) = 13x^2 - 8xy + 7y^2 + 20x - 50y + 86.$

Vlastní čísla: $(5, 15)$. Vlastní vektory: $(1, 2)$, $(-2, 1)$

Elipsa $\left(\xi - \dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 3\left(\eta - \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ o středu $\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right) \doteq (3.5777, 1.3416).$

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right) = (-0.4, 3.8).$

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1.107149$ v míře obloukové, tedy přibližně $63^\circ\,26'\,5.82''$.



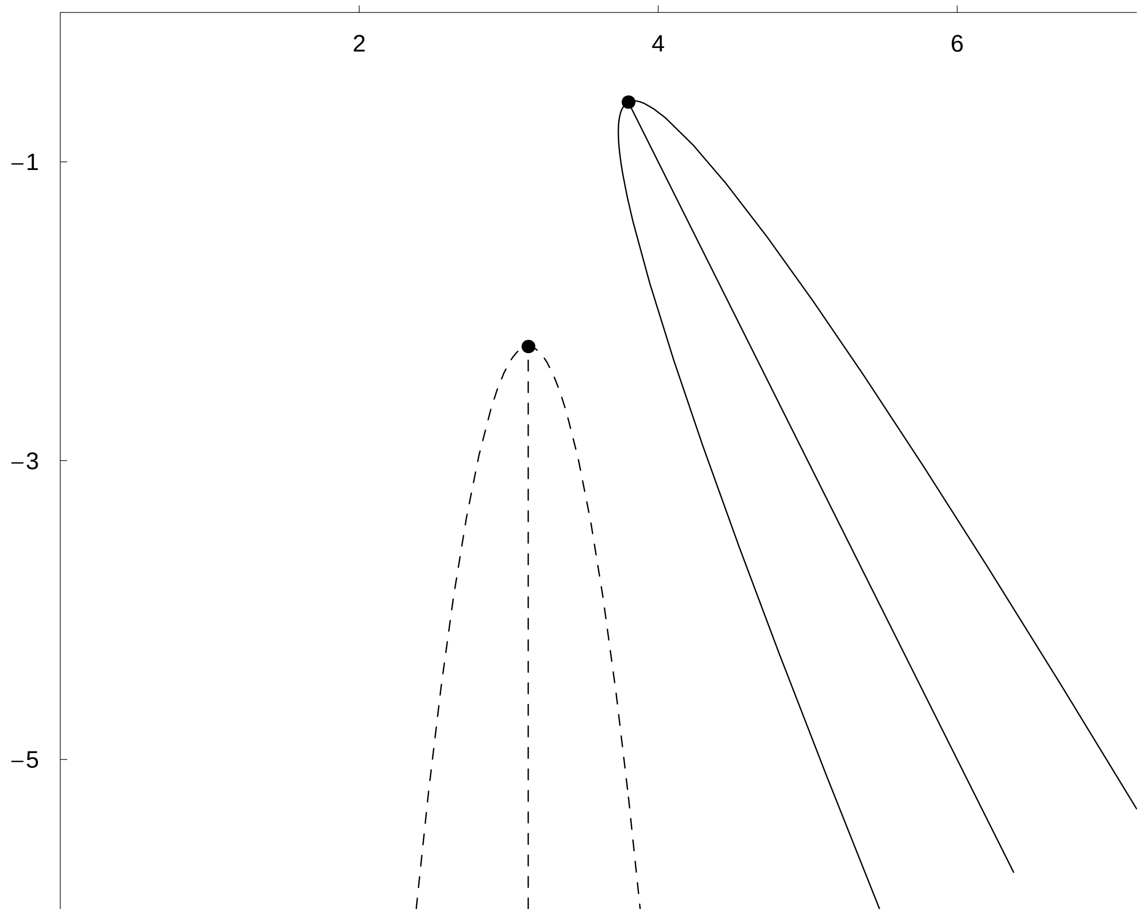
Cvičení 04. $\Omega(x,y) = 12x^2 + 12xy + 3y^2 - 85x - 40y + 152.$

Vlastní čísla: $(15, 0)$. Vlastní vektory: $(2,1)$, $(-1,2)$

Parabola $\eta + \sqrt{5} = -3\sqrt{5}\left(\xi - \dfrac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$ s vrcholem $\left(\dfrac{7}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\right) \doteq (3.1305, -2.2361)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{19}{5}, -\frac{3}{5}\right) = (3.8, -0.6)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \doteq 0.4636476$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ\, 33'\, 54.18''$.



Cvičení 05. $\Omega(x,y) = 3x^2 - 14xy + 3y^2 - 18x + 42y + 27.$

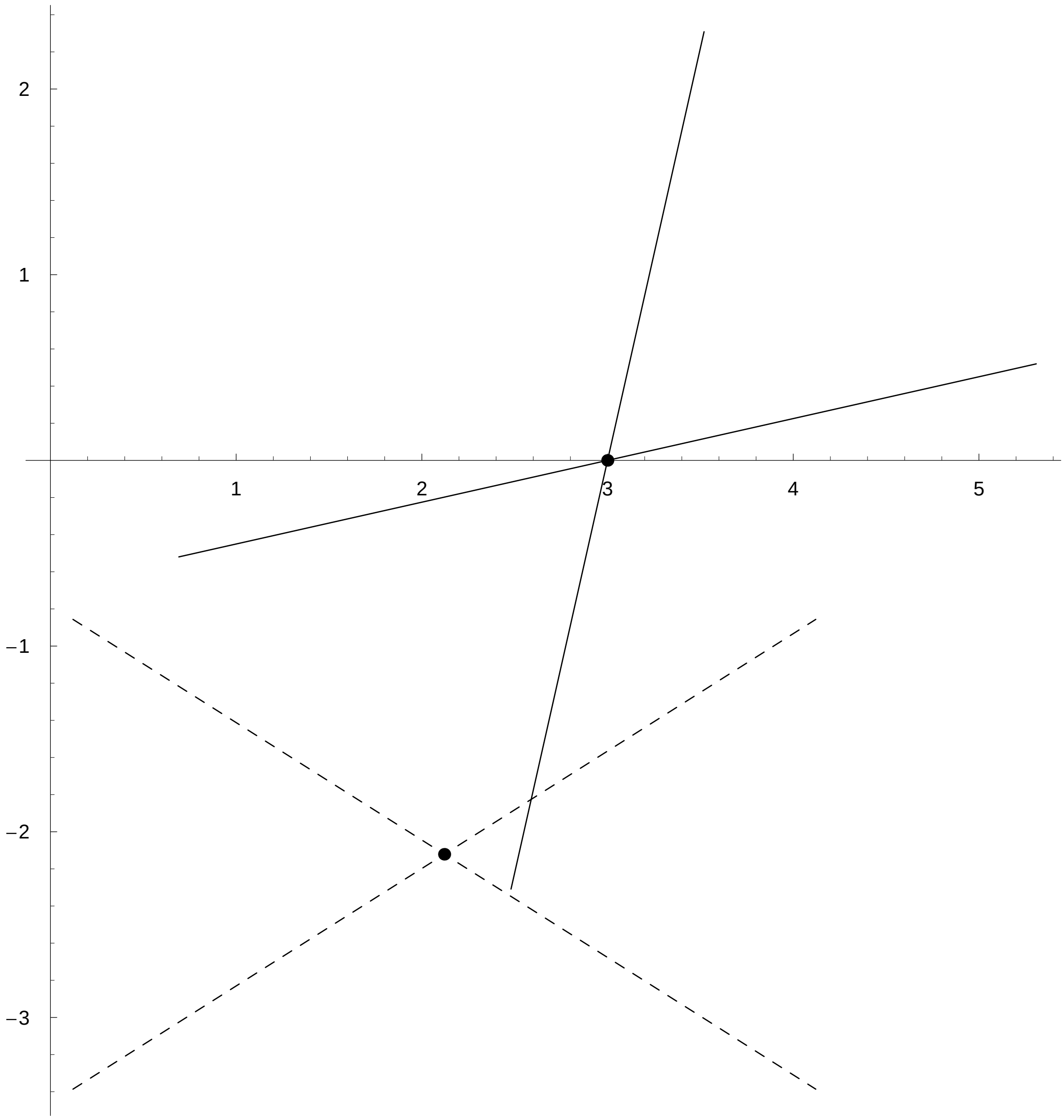
Vlastní čísla: $(-4, 10)$. Vlastní vektory: $(1,1)$, $(-1,1)$.

Různoběžky $\eta = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{3-\sqrt{2}\,\xi}{\sqrt{5}}$ s průsečíkem $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) \doteq (2.1213, -2.1213)$

svírají úhel $2 \operatorname{arctg} \sqrt{2/5} \doteq 1.1278853$, tedy přibližně $64^\circ\, 37'\, 23.04''$.

Průsečík různoběžek $\Omega(x,y) = 0$: $(3,0)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ v míře obloukové, tedy 45°.

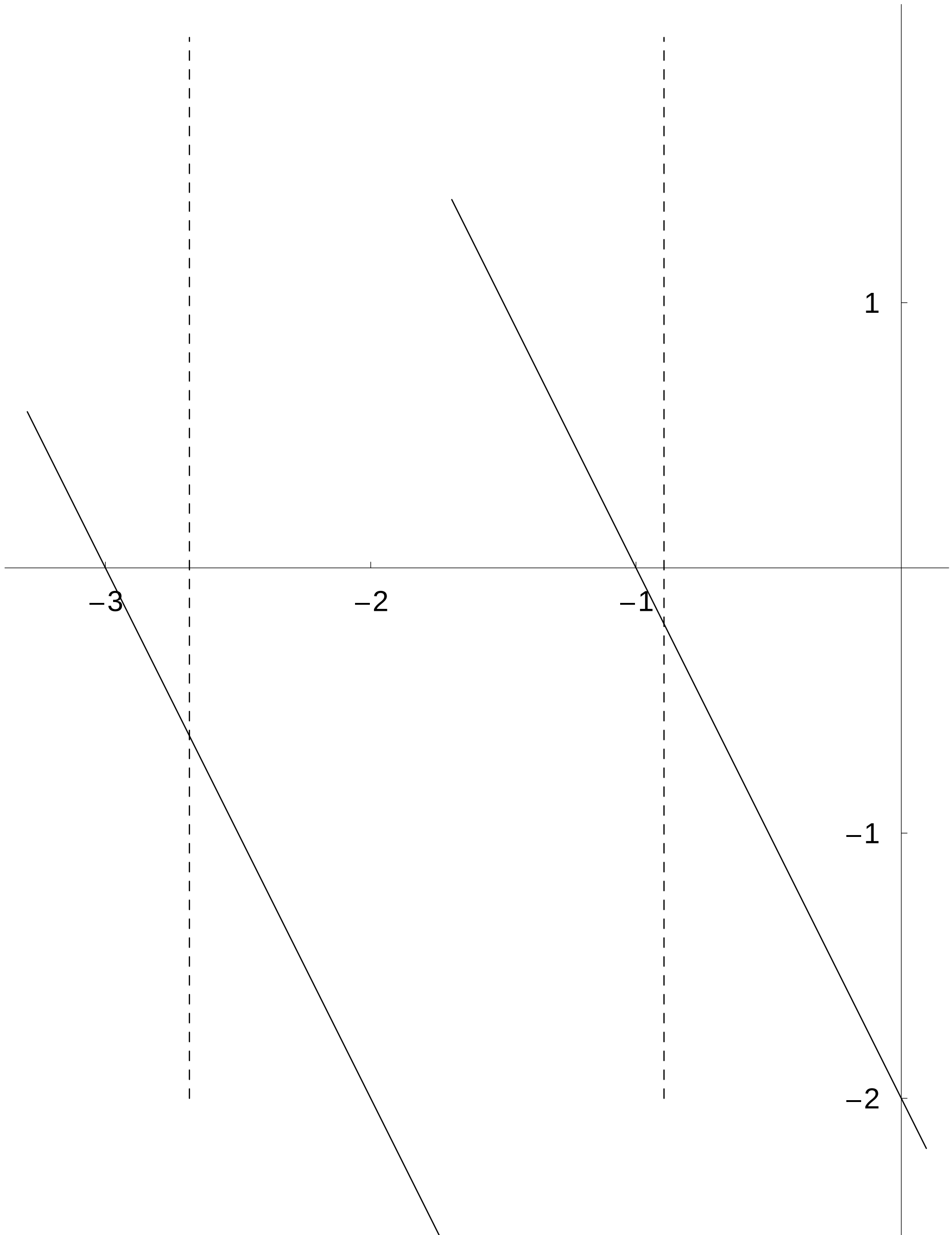


Cvičení 06. $\Omega(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 12$.

Vlastní čísla: $(5, 0)$. Vlastní vektory: $(2, 1)$, $(-1, 2)$.

$$\text{Rovnoběžky } \xi = -\frac{6}{\sqrt{5}} \doteq -2.6833 \text{ a } \xi = -\frac{2}{\sqrt{5}} \doteq -0.8944.$$

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq 0.4636476$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ 33' 54.18''$.



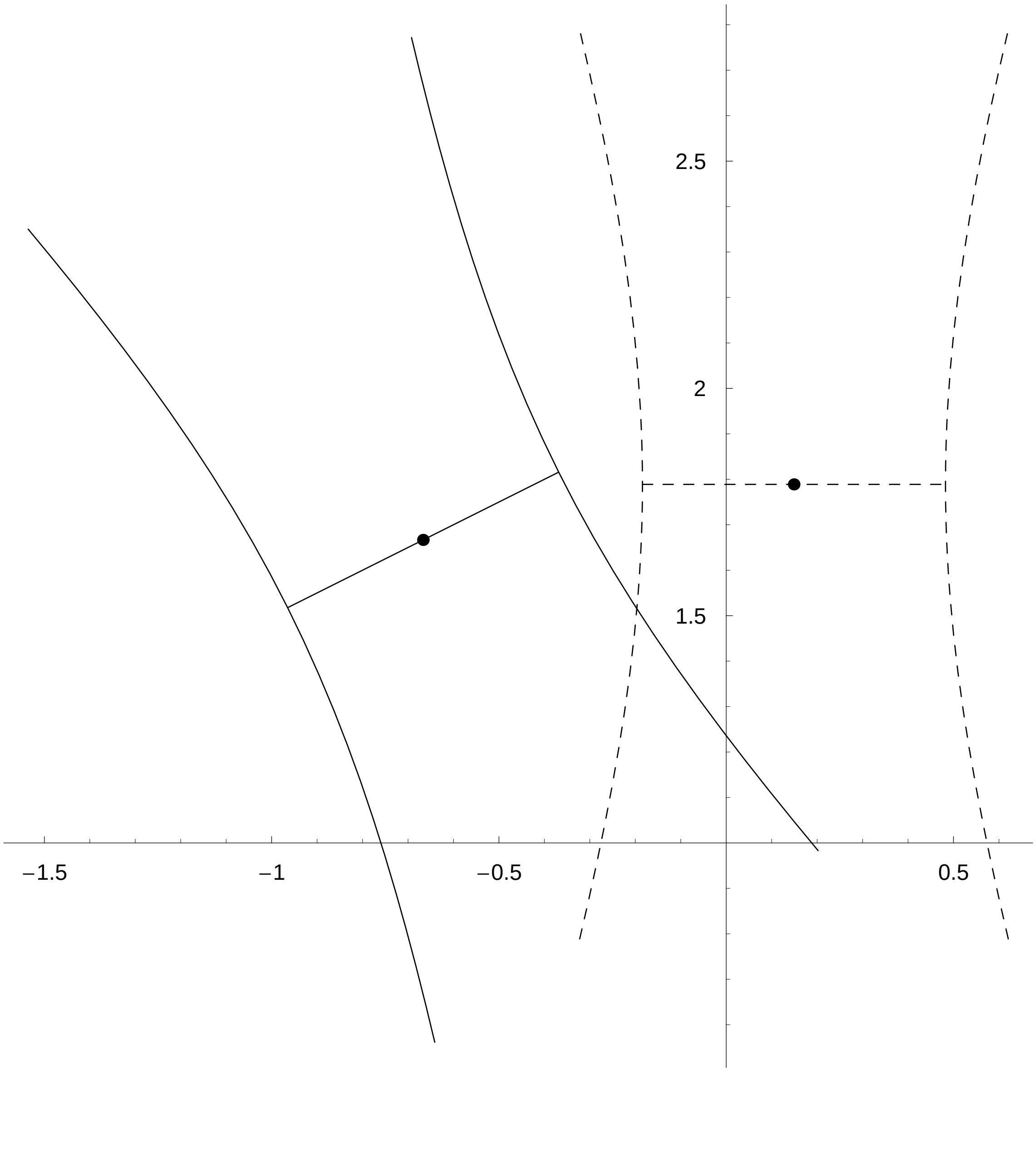
Cvičení 07. $\Omega(x,y) = 7x^2 + 8xy + y^2 - 4x + 2y - 4.$

Vlastní čísla: $(9,-1)$. Vlastní vektory: $(2,1)$, $(-1,2)$.

Hyperbola $9\Big(\xi - \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\Big)^2 - \Big(\eta - \dfrac{4}{\sqrt{5}}\Big)^2 = 1$ o středu $\Big(\dfrac{1}{3\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\Big) \doteq (0.1491, 1.7889)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\big(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\big) \doteq (-0.6667, 1.6667)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq 0.4636476$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ\, 33'\, 54.18''$.



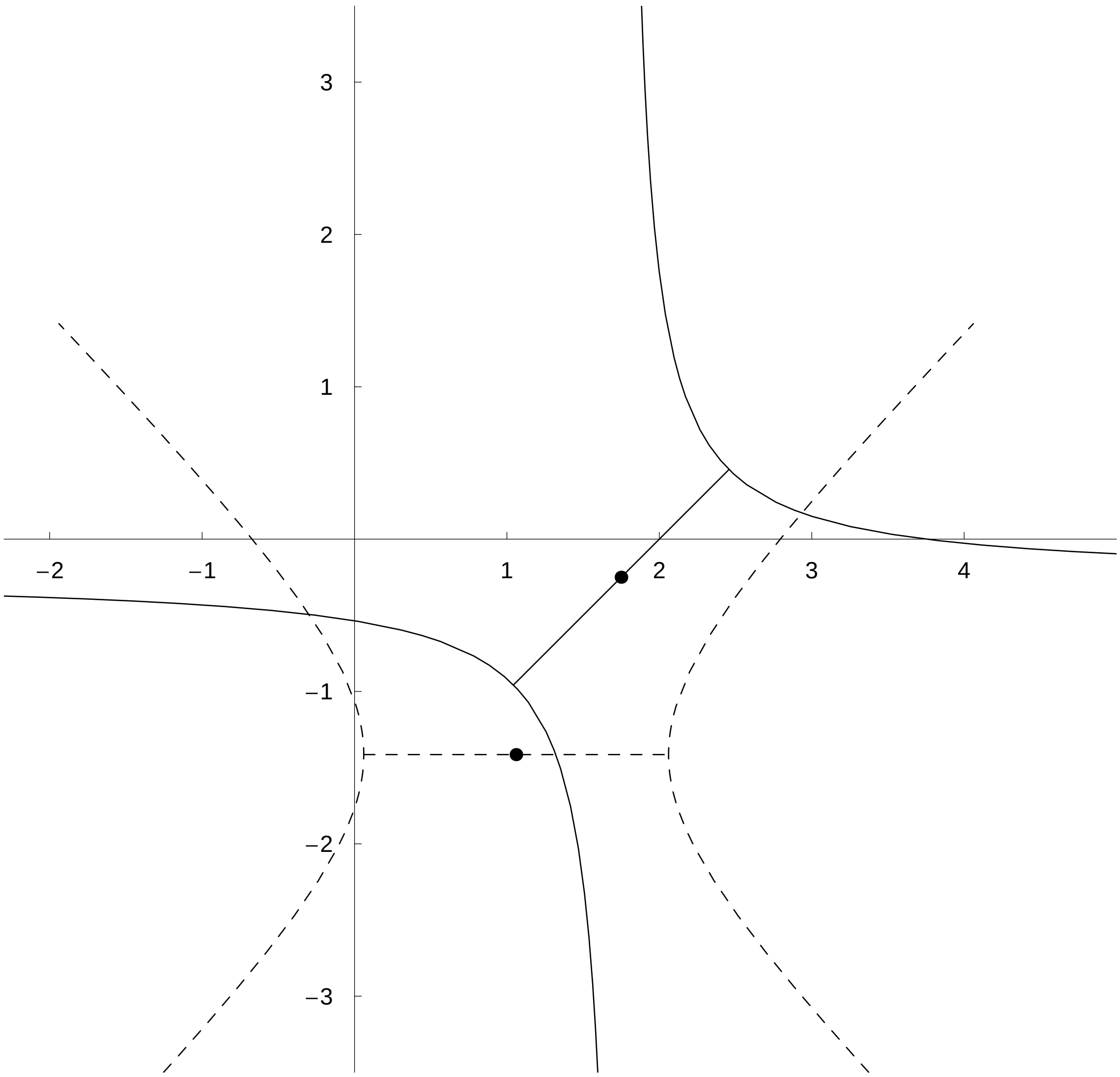
Cvičení 08. $\Omega(x,y) = 16xy + 4x - 28y - 15.$

Vlastní čísla: $(8, -8)$. Vlastní vektory: $(1,1)$, $(-1,1)$.

Rovnoosá hyperbola $\left(\xi - \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 = 1$ o středu $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \doteq (1.0607, -1.4142)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right) = (1.75, -0.25)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ v míře obloukové, tedy 45°.



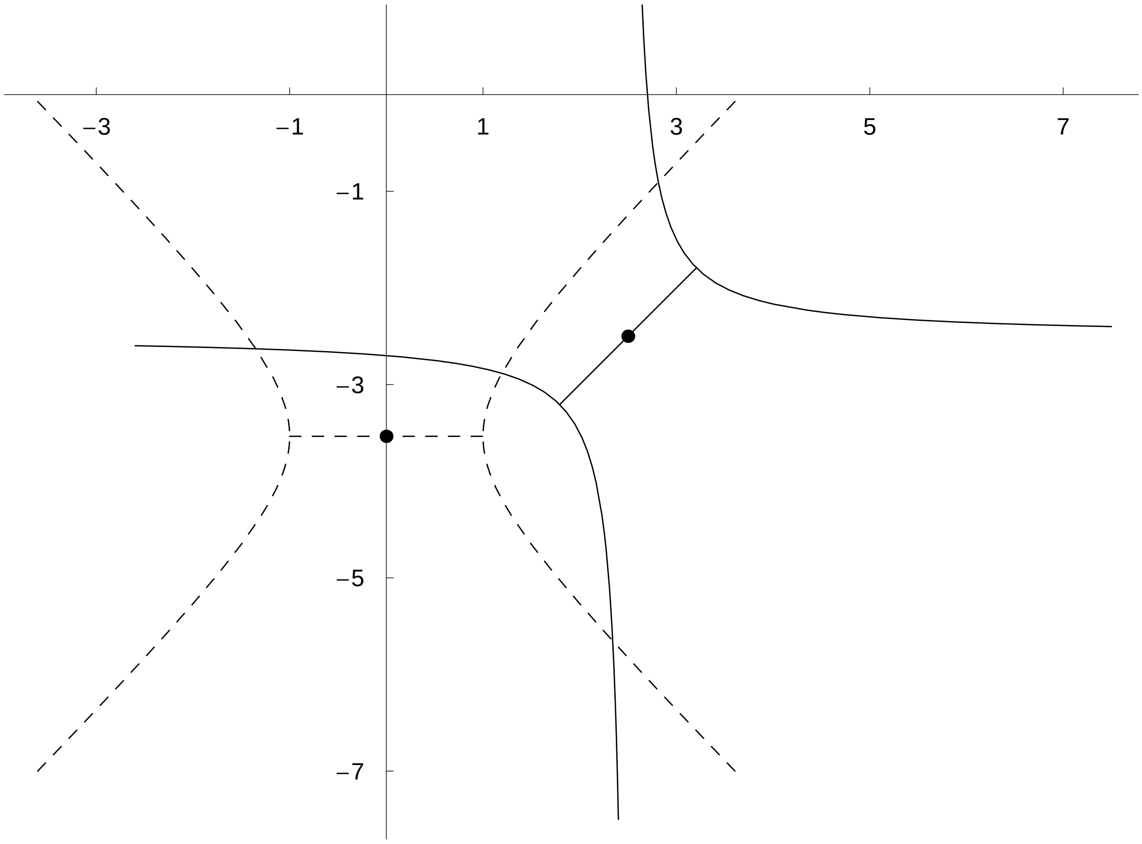
Cvičení 09. $\Omega(x,y) = 4xy + 10x - 10y - 27$.

Vlastní čísla: $(2,-2)$. Vlastní vektory: $(1,1)$, $(-1,1)$.

Rovnoosá hyperbola $\xi^2 - \left(\eta + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ o středu $\left(0, -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right) \doteq (0, -3.5355)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) = (2.5, -2.5)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ v míře obloukové, tedy 45°.



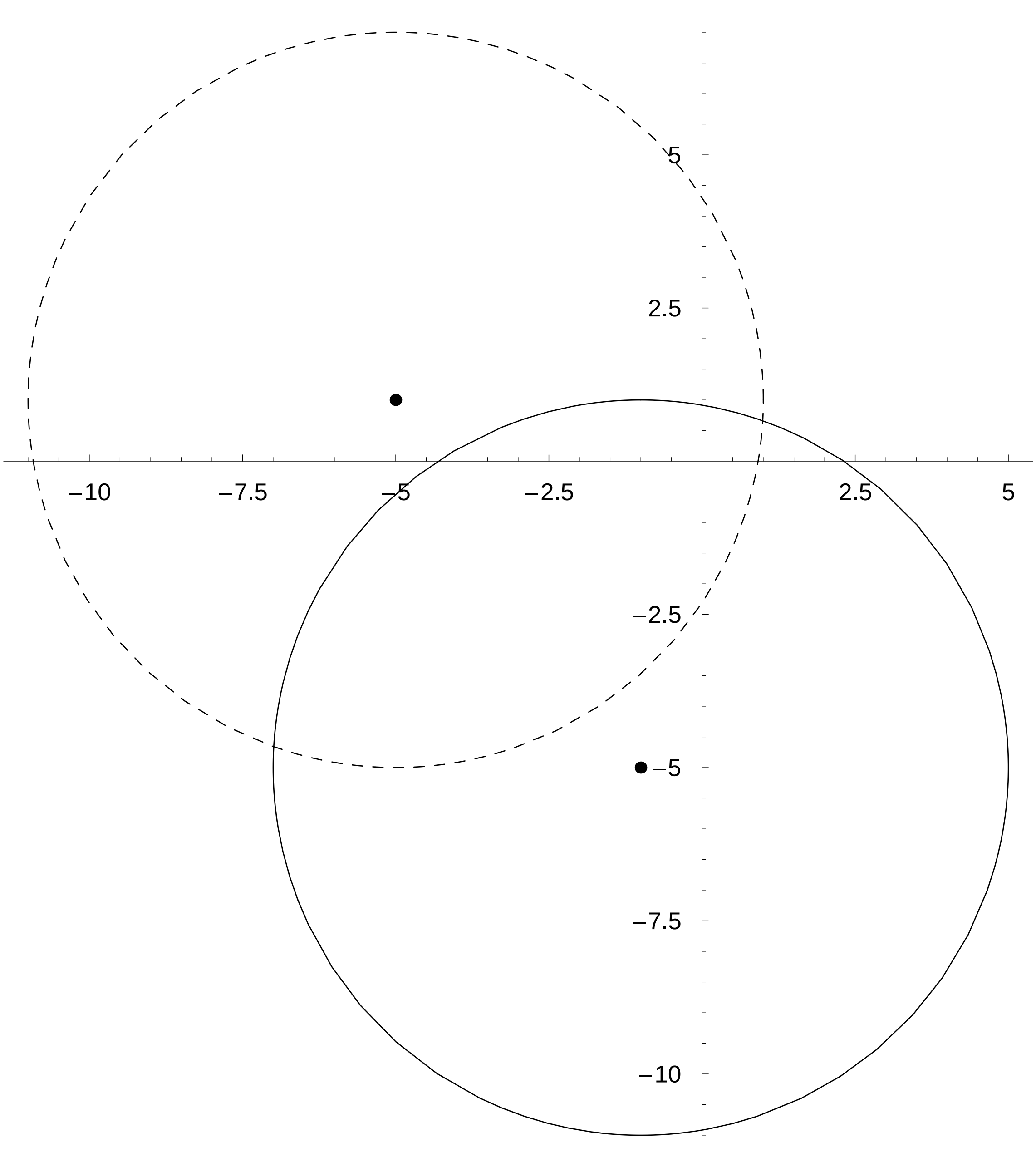
Cvičení 10. $\Omega(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10.$

Vlastní čísla: $(1,1)$. Vlastní vektory: $(0,1)$, $(-1,0)$.

Kružnice $\frac{1}{36}\big(\xi+5\big)^2 + \frac{1}{36}\big(\eta-1\big)^2 = 1$ o středu $\big(-5,1\big)$.

Střed kružnice $\Omega(x,y) = 0$: $\big(-1,-5\big)$.

Úhel otočení: $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$ v míře obloukové, tedy $90°$.



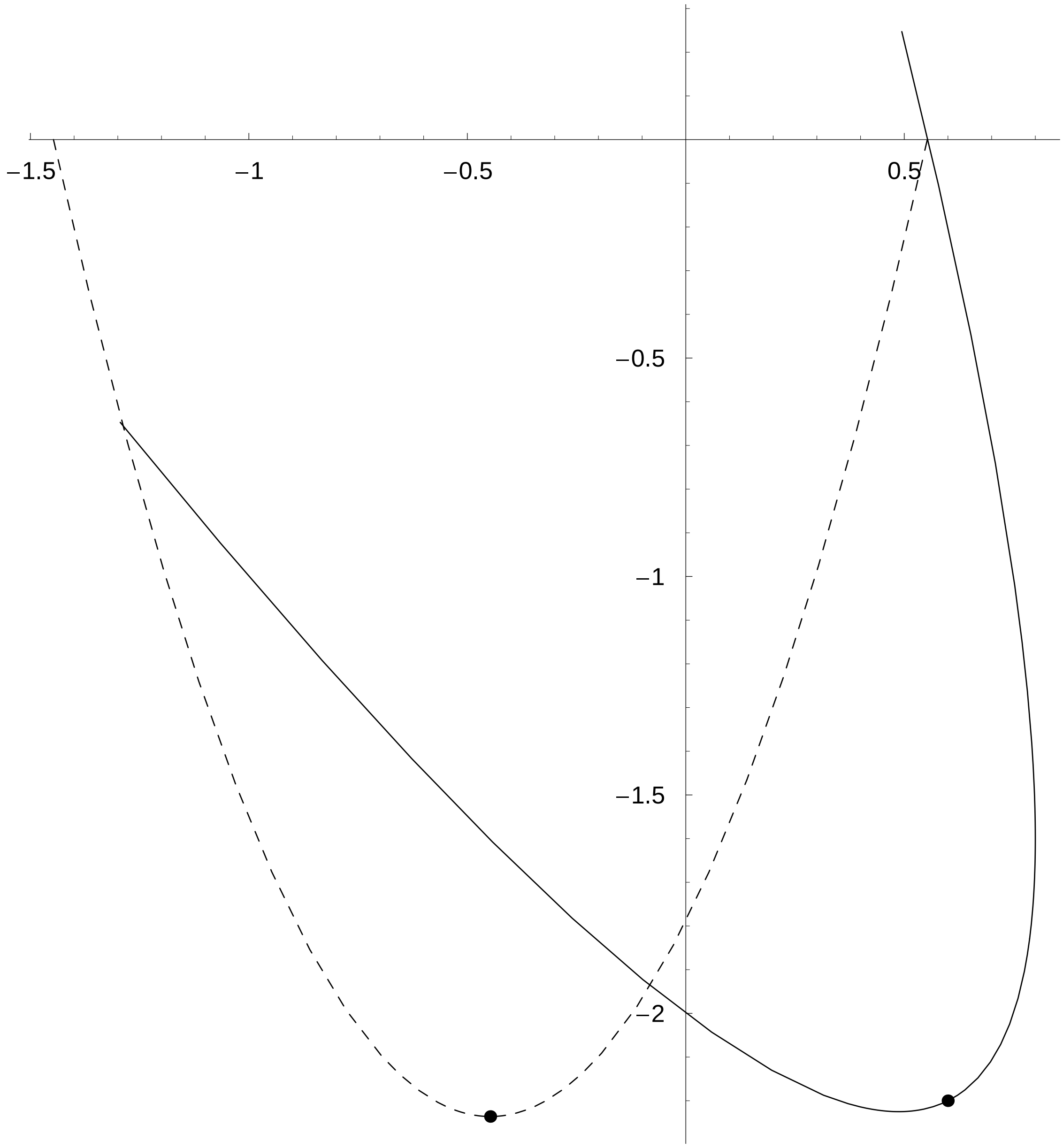
Cvičení 11. $\Omega(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 5x - 4.$

Vlastní čísla: $(5, 0)$. Vlastní vektory: $(2, 1)$, $(-1, 2)$

Parabola $\eta + \sqrt{5} = \sqrt{5}\left(\xi + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$ s vrcholem $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\right) \doteq (-0.4472, -2.2361)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right) = (0.6, -2.2)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq 0.4636476$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ\,33'\,54.18''$.



Cvičení 12. $\Omega(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 6x + 18y + 18.$

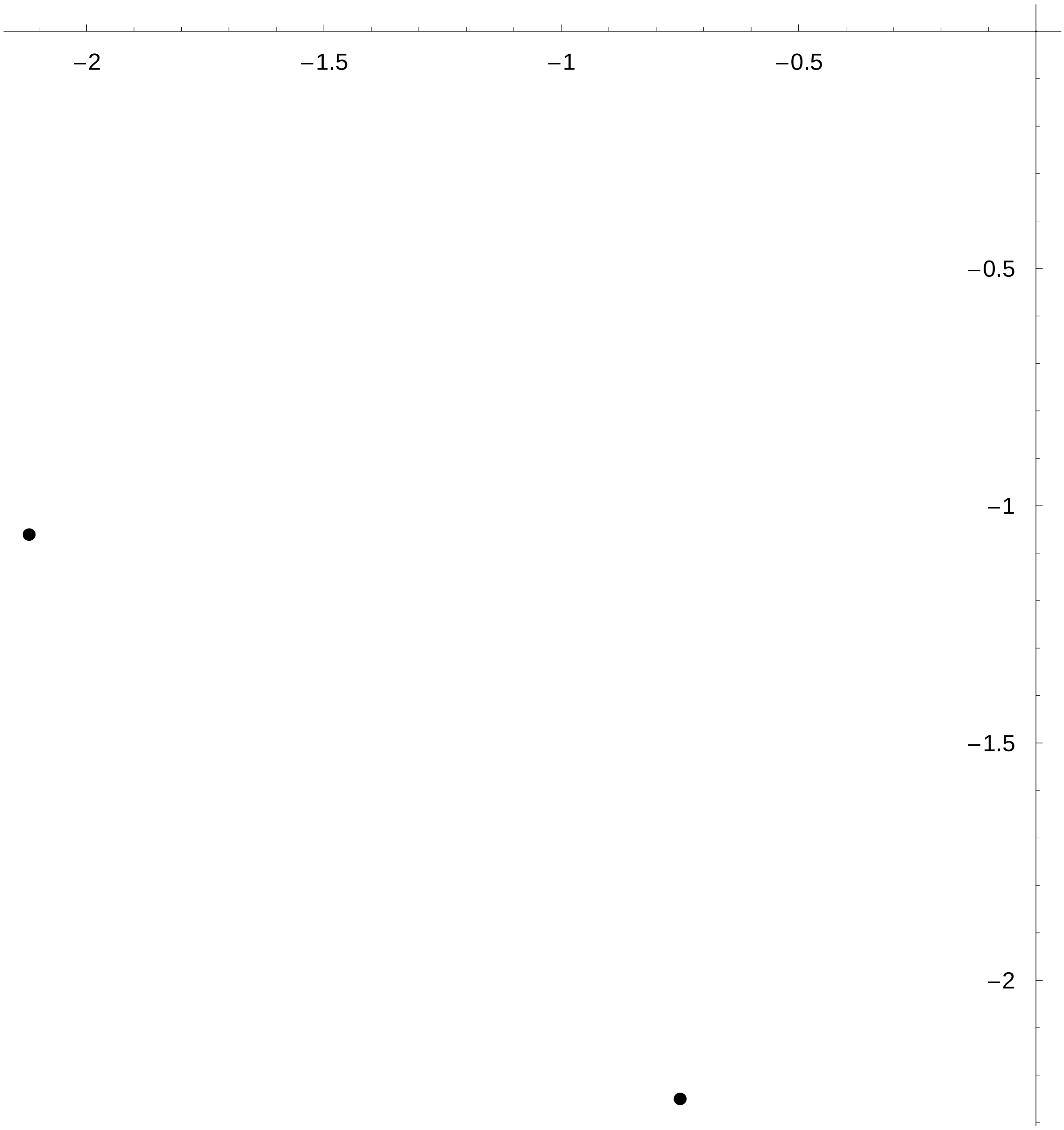
Vlastní čísla: $(2,8)$. Vlastní vektory: $(1,1)$, $(-1,1)$

$$\text{Jednobodová množina } \left(\xi + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\eta + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

$$\text{tj. } \left\{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\right\} \doteq \{(-2.1213, -1.0607)\}.$$

$$\text{Množina } \Omega(x,y) = 0: \ -\left\{\tfrac{3}{4}, \tfrac{9}{4}\right\}.$$

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ v míře obloukové, tedy $45°$.



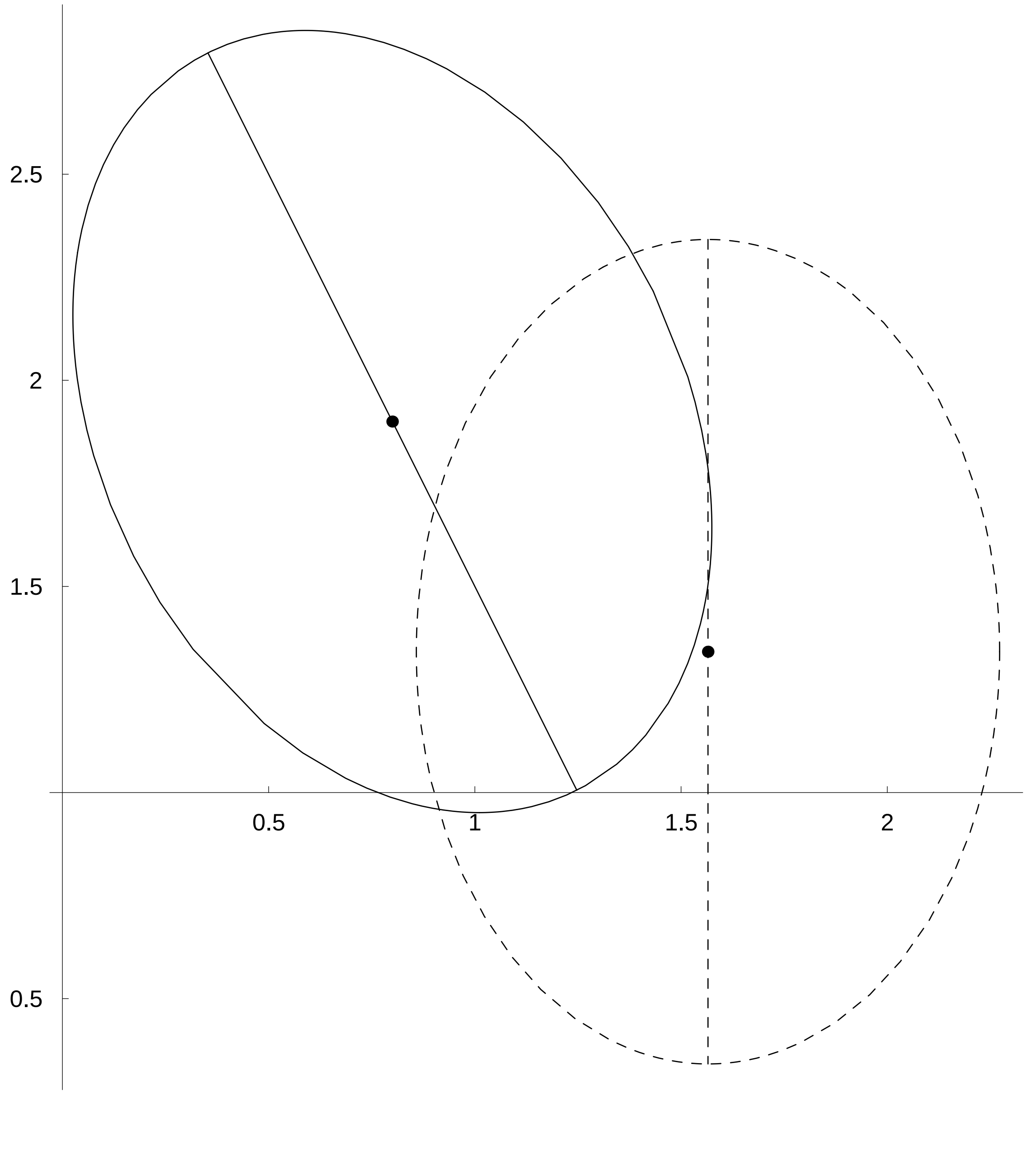
Cvičení 13. $\Omega(x,y) = 18x^2 + 8xy + 12y^2 - 44x - 52y + 57$.

Vlastní čísla: $(20, 10)$. Vlastní vektory: $(2,1)$, $(-1,2)$.

Elipsa $2\Big(\xi - \dfrac{7}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\eta - \dfrac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2 = 1$ o středu $\Big(\dfrac{7}{2\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\Big) \doteq (1.5653, 1.3416)$.

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\big(\frac{4}{5}, \frac{19}{10}\big) = (0.8, 1.9)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \doteq 0.463648$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ\, 33'\, 54.18''$.



Cvičení 14. $\Omega(x,y) = -2x^2 - 3xy + 2y^2 + 7x - 16y + 30.$

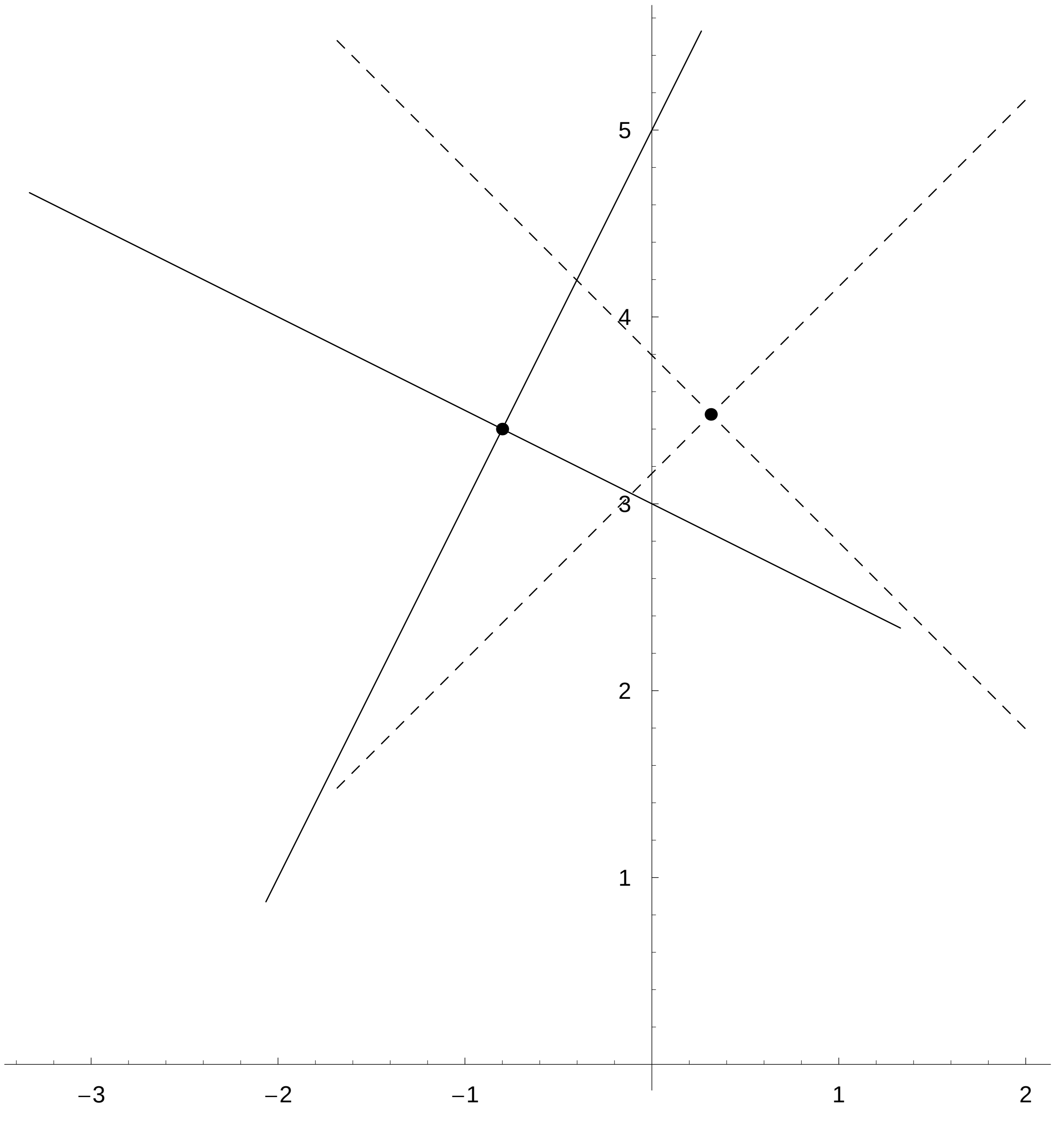
Vlastní čísla: $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Vlastní vektory: $(3,1)$, $(-1,3)$.

Rovnice $\left(\xi - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \left(\eta - \dfrac{11}{\sqrt{10}}\right)^2$) popisuje dvojici ortogonálních přímek

$\eta = 6\sqrt{\frac{2}{5}} - \xi$ a $\eta = \sqrt{10} + \xi$ s průsečíkem $(1/\sqrt{10}, 11/\sqrt{10}) \doteq (0.3162, 3.4785)$.

$\Omega(x,y) = (y - 2x - 5)(2y + x - 6)$; příslušné přímky se protínají v bodě $\left(-\frac{4}{5}, \frac{17}{5}\right) \doteq (-0.8, 3.4)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \doteq 0.3217506$ v míře obloukové, tedy přibližně $18^\circ 26' 5.82''$.



Cvičení 15. $\Omega(x,y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x - 4y + 5$.

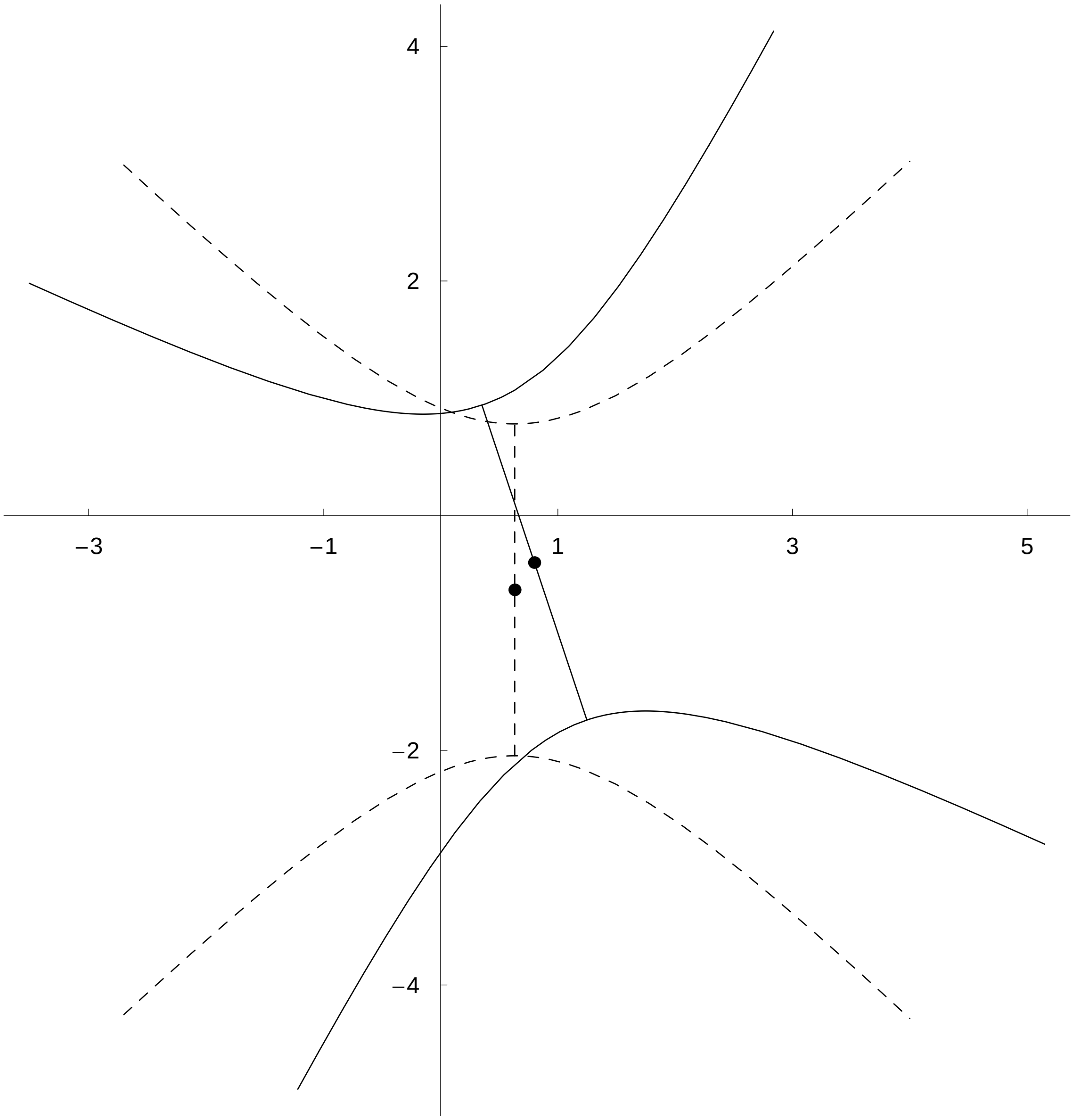
Vlastní čísla: $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$. Vlastní vektory: $(3,1)$, $(-1,3)$.

$$\text{Rovnoosá hyperbola } -\frac{1}{2}\Big(\xi + \sqrt{\frac{2}{5}}\,\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\eta - \sqrt{\frac{2}{5}}\,\Big)^2 = 1$$

o středu $\big(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\,\big) = (-0.6325, 0.6325)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\big(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\big) = (0.8, -0.4)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \doteq 0.3217506$ v míře obloukové, tedy přibližně $18^\circ 26' 5.82''$.



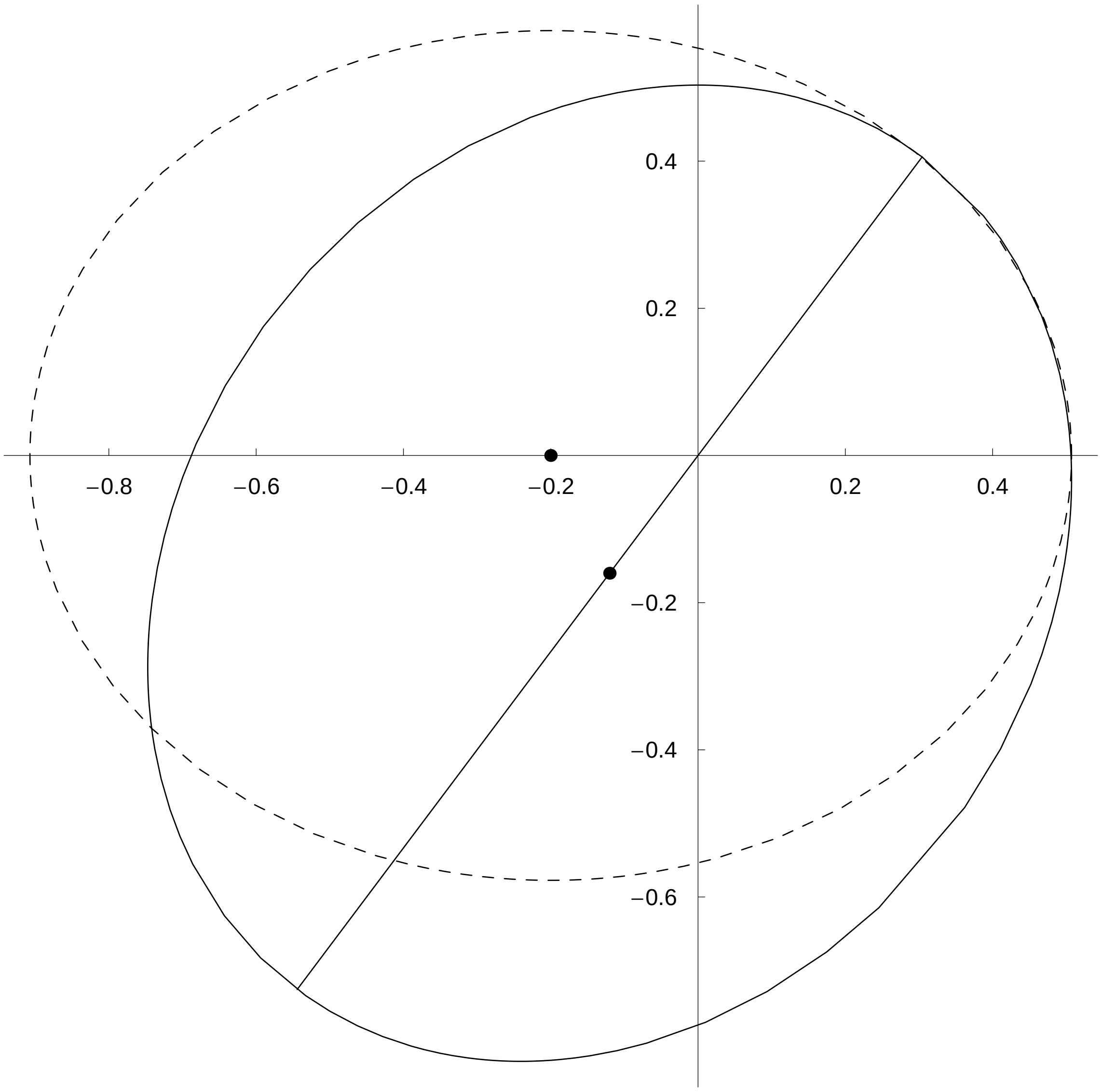
Cvičení 16. $\Omega(x,y) = 66x^2 - 24xy + 59y^2 + 12x + 16y - 23$.

Vlastní čísla: $(50, 75)$. Vlastní vektory: $(3,4)$, $(-4,3)$.

Elipsa $2\left(\xi + \frac{1}{5}\right)^2 + 3\eta^2 = 1$ o středu $(\frac{1}{5}, 0) = (-0.2, 0)$.

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\left(-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) = (-0.12, -0.16)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} \doteq 0.9272952$ v míře obloukové, tedy přibližně $53^\circ\,07'\,48.37''$.



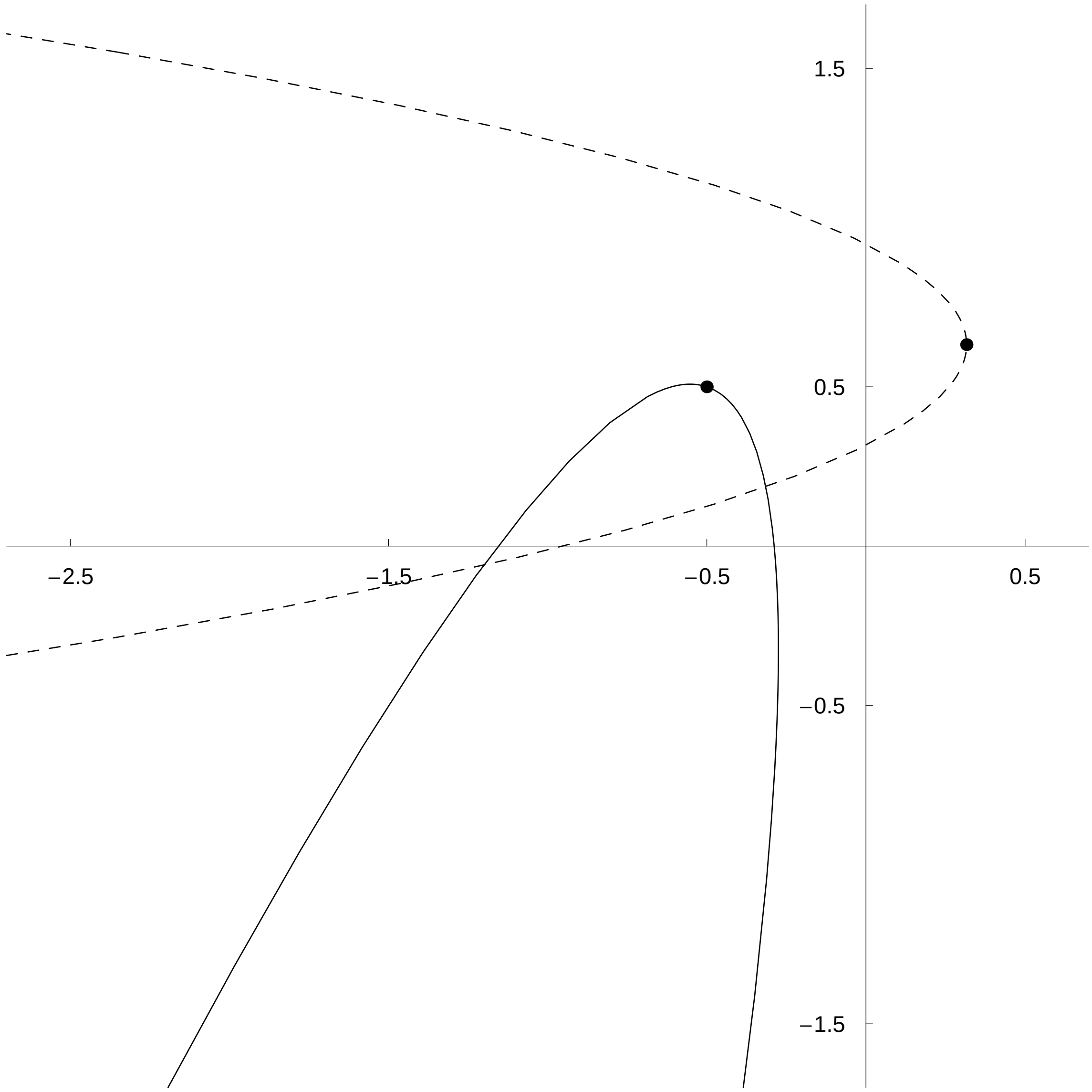
Cvičení 17. $\Omega(x,y) = 9x^2 - 6xy + y^2 + 13x - y + 3$.

Vlastní čísla: $(0, 10)$. Vlastní vektory: $(1, 3)$, $(-3, 1)$.

Parabola $\xi - \dfrac{1}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10}\Big(\eta - \sqrt{\dfrac{2}{5}}\Big)^2$ s vrcholem $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\dfrac{2}{5}}\Big) \doteq (0.3162, 0.6325)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = (-0.5, 0.5)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 3 \doteq 1.2490458$ v míře obloukové, tedy přibližně $71^\circ 33' 54.18''$.



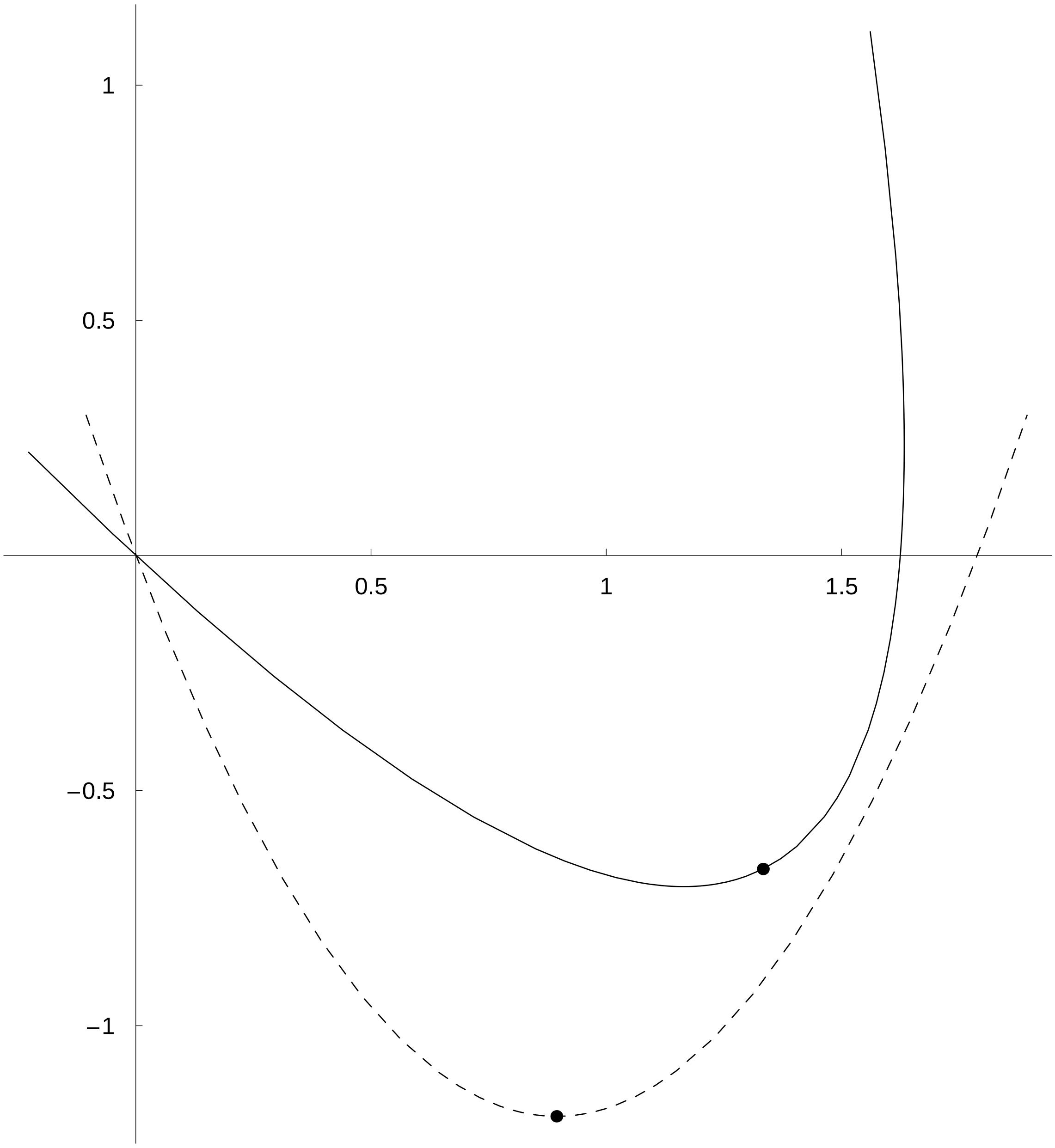
Cvičení 18. $\Omega(x,y) = 8x^2 + 8xy + 2y^2 - 13x - 14y$.

Vlastní čísla: $(10,0)$. Vlastní vektory: $(2,1)$, $(-1,2)$

Parabola $3\sqrt{5}\Big(\eta + \dfrac{8}{3\sqrt{5}}\Big) = 10\Big(\xi - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2$ s vrcholem $\Big(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{8}{3\sqrt{5}}\Big) \doteq (0.8944, -1.1926)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $\big(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\big) = (1.3333, -0.6667)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq 0.463648$ v míře obloukové, tedy přibližně $26^\circ\,33'\,54.18''$.



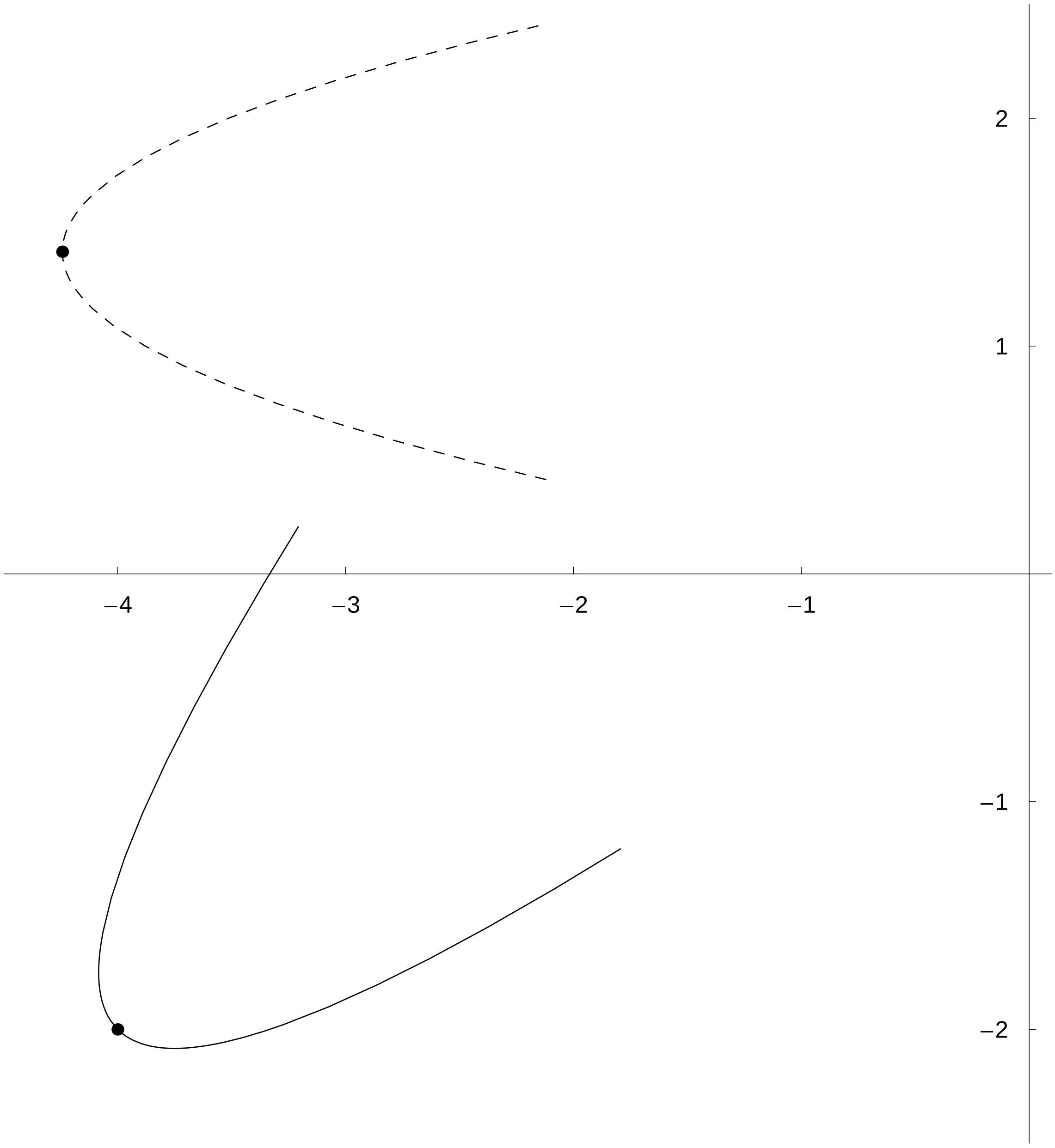
Cvičení 19. $\Omega(x,y) = 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 10x - 14y$.

Vlastní čísla: $(0,6)$. Vlastní vektory: $(1,1)$, $(-1,1)$

Parabola $\xi + 3\sqrt{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\Big(\eta - \sqrt{2}\Big)^2$ s vrcholem $\Big(-3\sqrt{2}, \sqrt{2}\Big) \doteq (-4.2426, 1.4142)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $(-4,-2)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ v míře obloukové, tedy $45°$.



Cvičení 20. $\Omega(x, y) = 11x^2 - 4xy + 14y^2 - 18x - 24y + 25.$

Vlastní čísla: $(10, 15)$. Vlastní vektory: $(2, 1)$, $(-1, 2)$.

Prázdná množina $10\Big(\xi - \dfrac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 15\Big(\eta - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 4 = 0.$

$$\emptyset$$

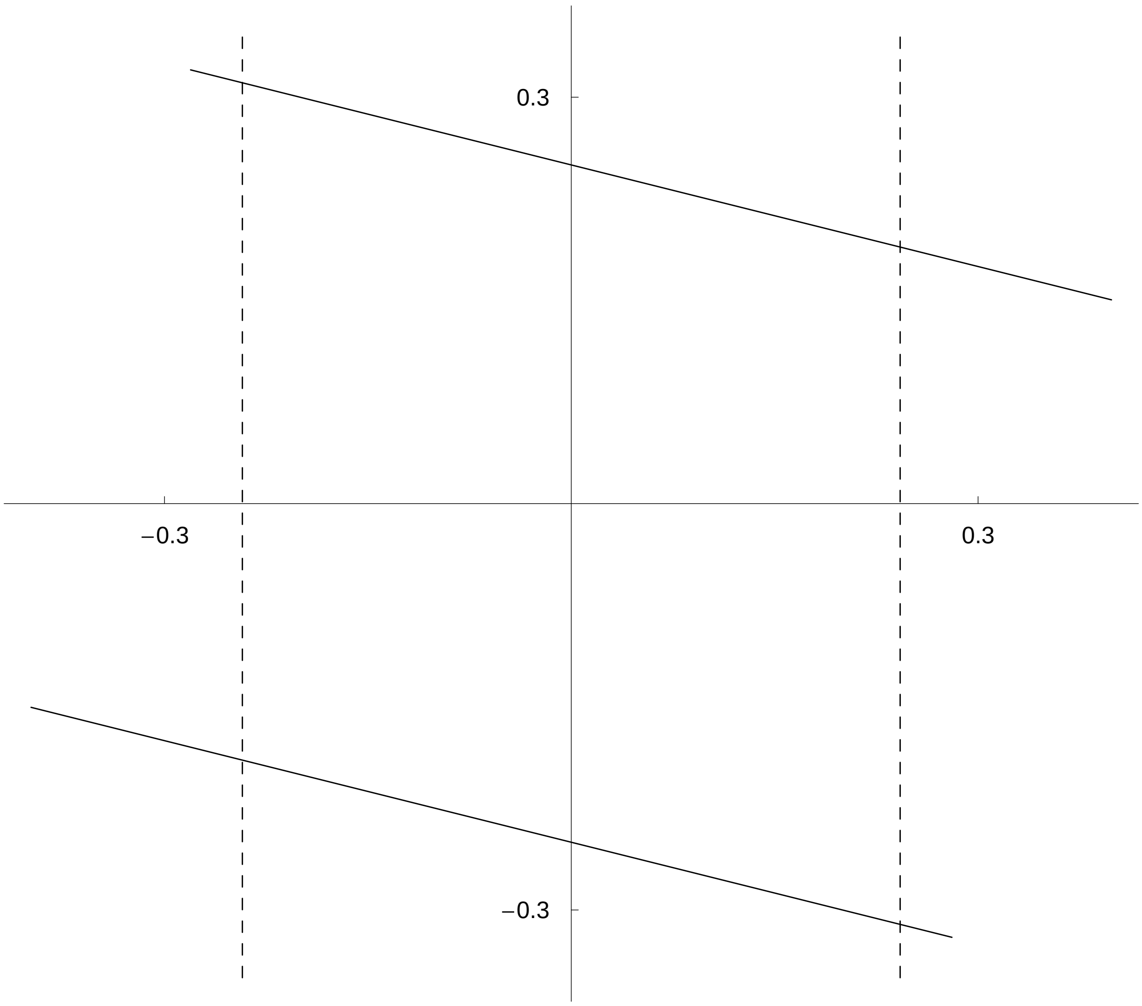
Cvičení 21. $\Omega(x,y) = x^2 + 8xy + 16y^2 - 1$.

Vlastní čísla: $(17, 0)$. Vlastní vektory: $(1, 4)$, $(-4, 1)$.

$$\text{Rovnoběžky } \xi = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Rovnoběžky $\Omega(x,y) = 0$: $y = -\frac{1}{4}(x \pm 1)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 4 \doteq 1.3258177$ v míře obloukové, tedy přibližně $75° \, 57' \, 49.52''$.



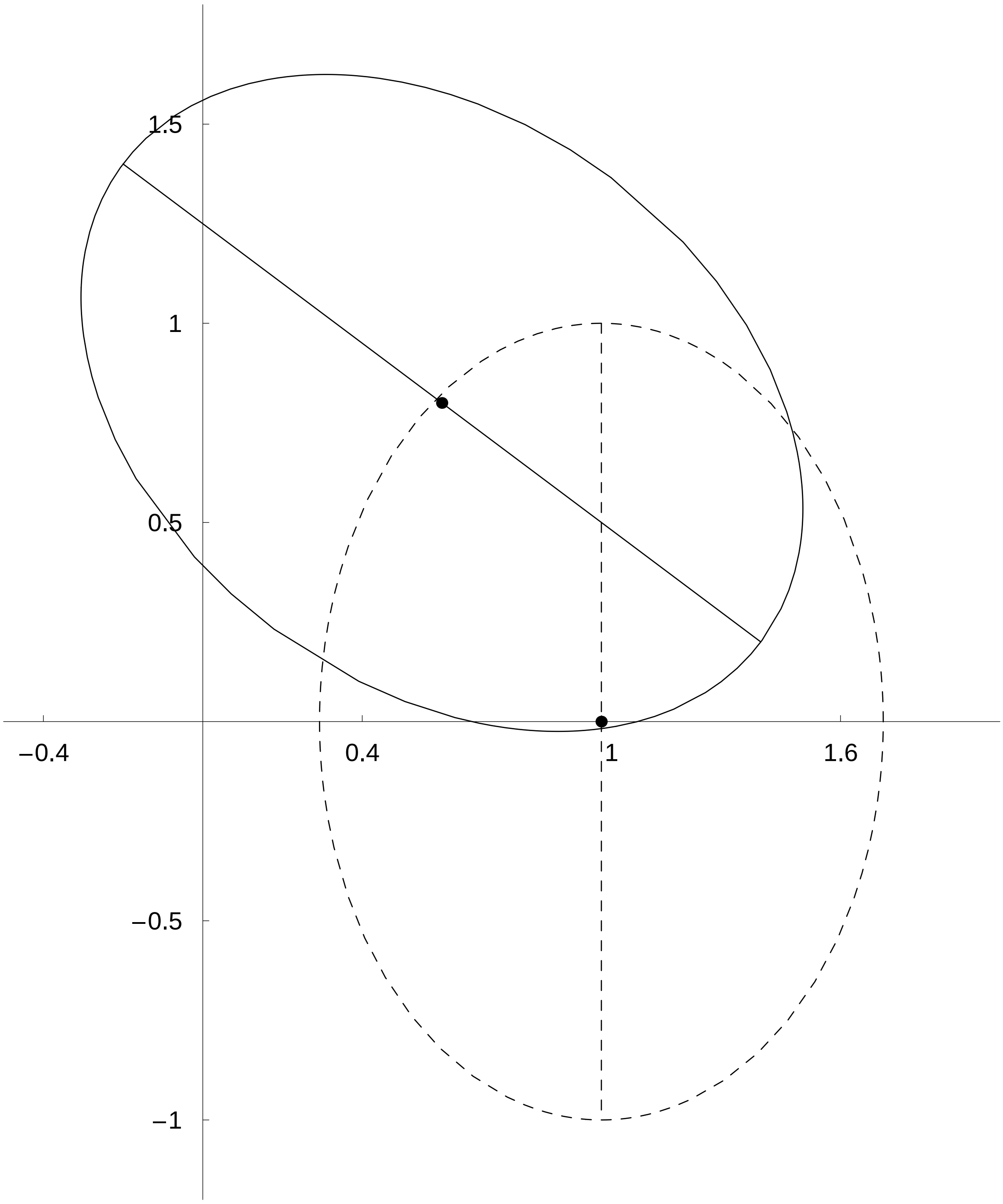
Cvičení 22. $\Omega(x,y) = 34x^2 + 24xy + 41y^2 - 60x - 80y + 25$.

Vlastní čísla: $(50, 25)$. Vlastní vektory: $(3,4)$, $(-4,3)$.

Elipsa $2\left(\xi - 1\right)^2 + \eta^2 = 1$ o středu $(1,0)$.

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (0.6, 0.8)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} \doteq 0.9272952$ v míře obloukové, tedy přibližně $53^\circ\,07'\,48.37''$.



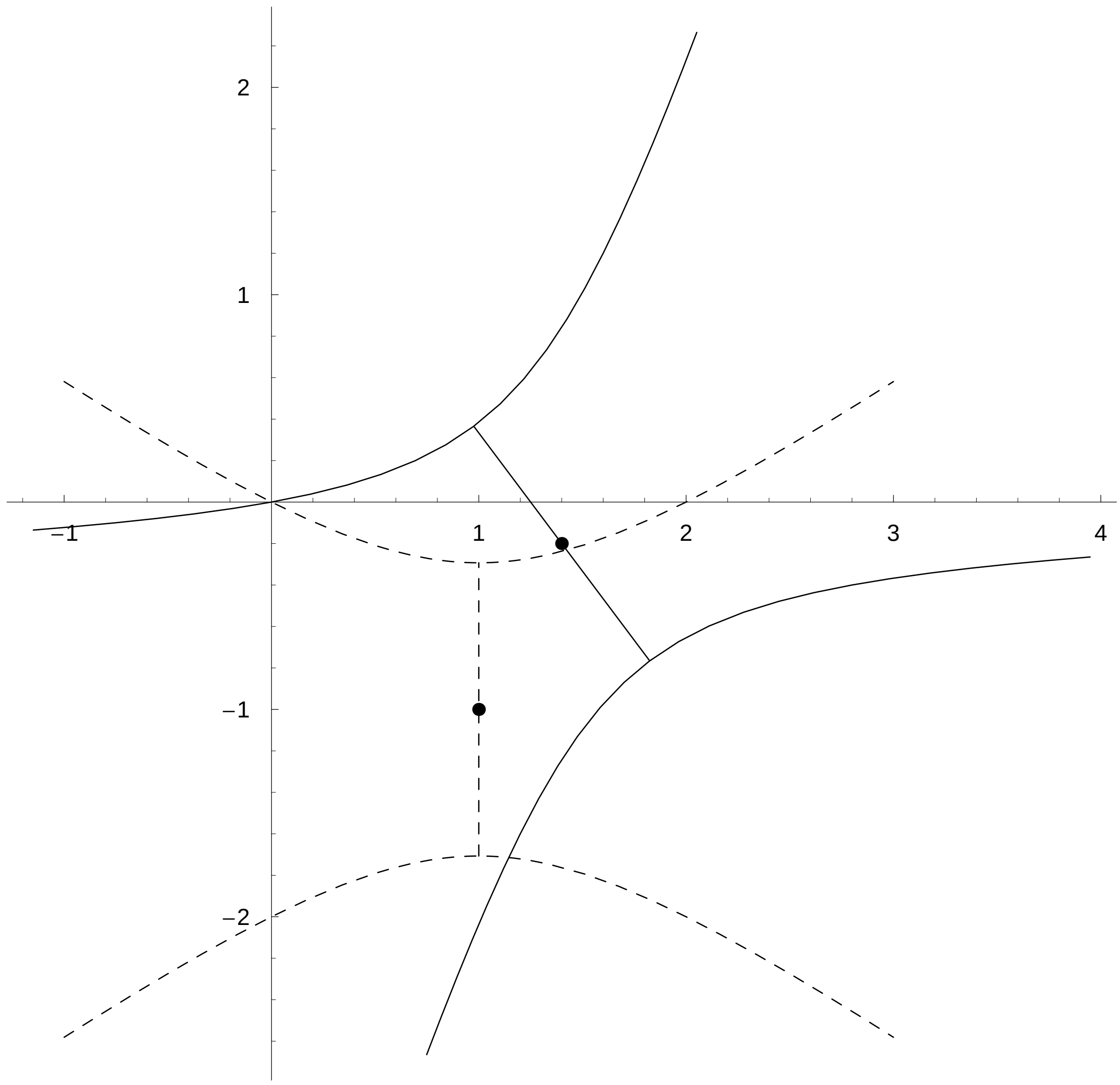
Cvičení 23. $\Omega(x,y) = 2x^2 - 72xy + 23y^2 - 20x + 110y.$

Vlastní čísla: $(-25, 50)$. Vlastní vektory: $(4,3)$, $(-3,4)$.

Hyperbola $-\left(\xi - 1\right)^2 + 2\left(\eta + 1\right)^2 = 1$ o středu $\left(1, -1\right)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right) = (1.4, -0.2)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \doteq 0.6435011$ v míře obloukové, tedy přibližně $36^\circ\, 52'\, 11.63''$.



Cvičení 24. $\Omega(x,y) = -5x^2 - 6xy + 3y^2 + 8\sqrt{10}x - 20$.

Vlastní čísla: $(-6, 4)$. Vlastní vektory: $(3,1)$, $(-1,3)$.

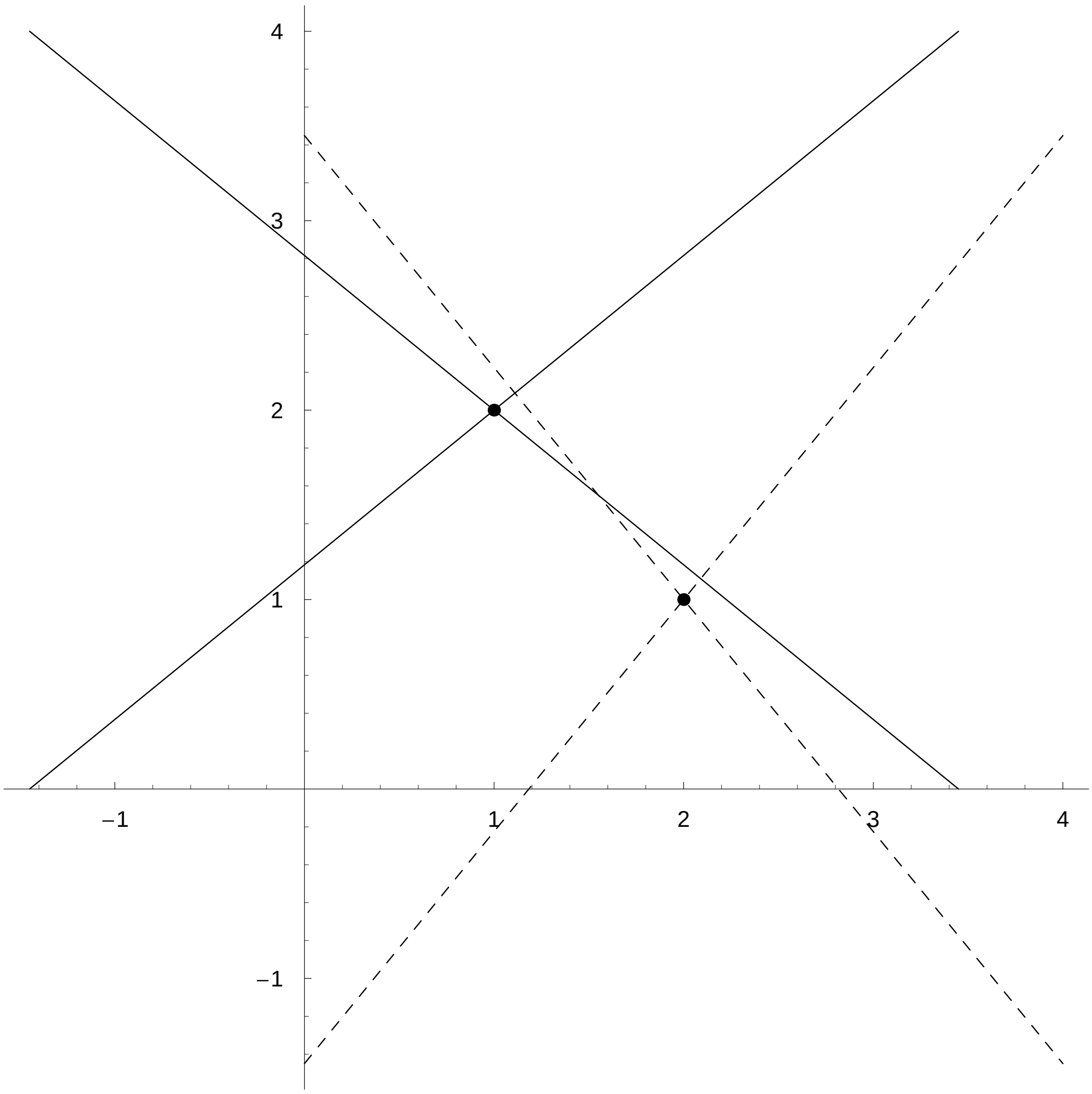
Rovnice $2(\eta-1)^2 = 3(\xi-2)^2$ popisuje různoběžky $\eta = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}(\xi - 2)$ s průsečíkem $(2,1)$,

svírající úhel $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 1.3694384$, tedy přibližně $78^\circ 27' 47''$.

$\Omega(x,y) = \left(\sqrt{3}y + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})x - 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3}y - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2\sqrt{5}\right)$;

různoběžky $\Omega(x,y) = 0$ se protínají v bodě $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \doteq (1.5811, 1.5811)$.

Úhel otočení: $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} \doteq 0.3217506$ v míře obloukové, tedy $18^\circ 26' 05.82''$.



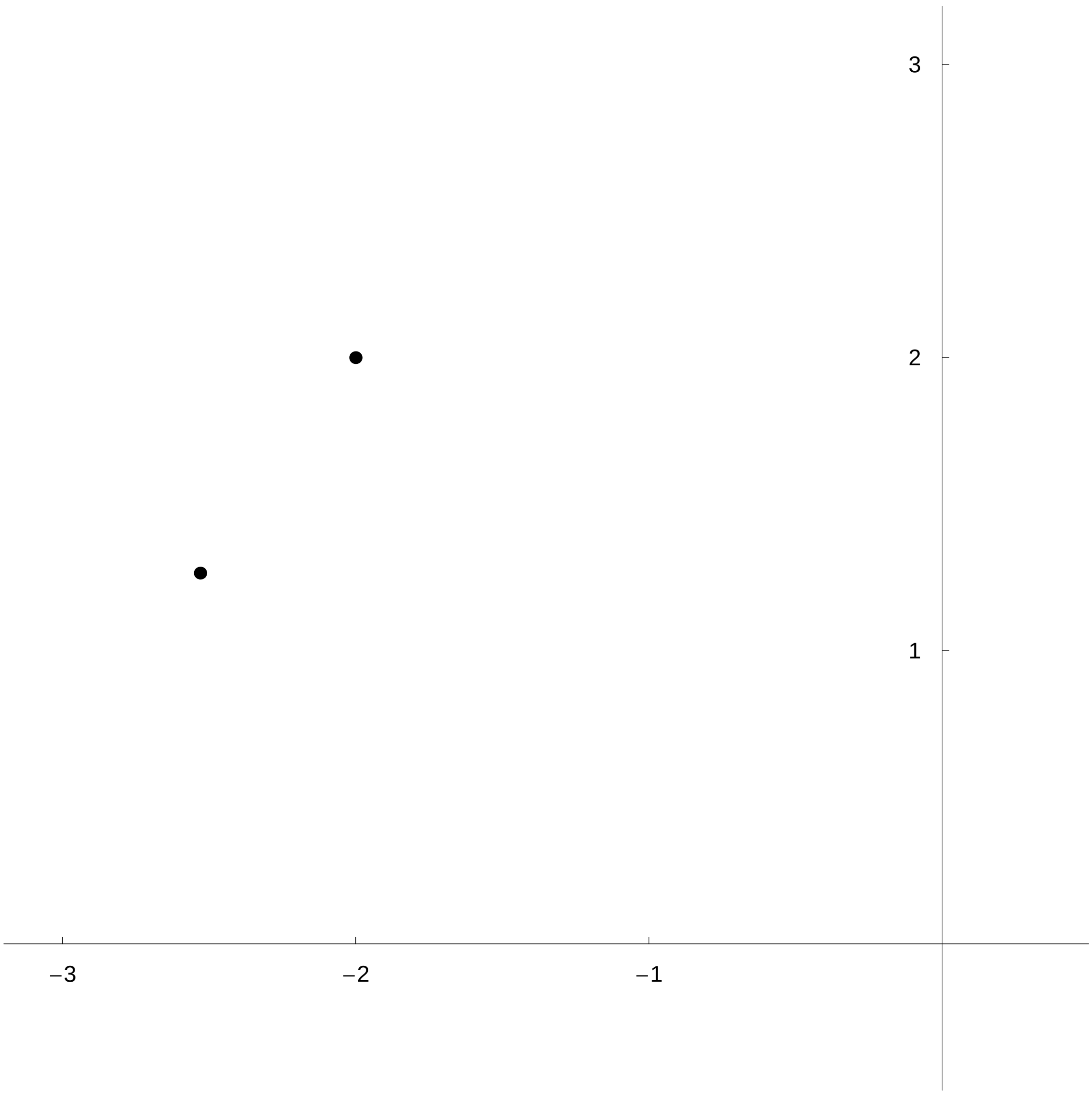
Cvičení 25. $\Omega(x,y) = 3x^2 - 3xy + 7y^2 + 6\sqrt{10}x - 8\sqrt{10}y + 40.$

Vlastní čísla: $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$. Vlastní vektory: $(3,1)$, $(-1,3)$

Jednobodová množina $(\xi+2)^2 + (\eta-2)^2 = 0$, tj. množina $\{(-2,2)\}$.

Jednobodová množina $\Omega(x,y) = 0$: $\left\{\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right\} \doteq \{(-2.5298, 1.2649)\}$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \doteq 0.3217506$ v míře obloukové, tedy přibližně $18^\circ 26' 5.82''$.



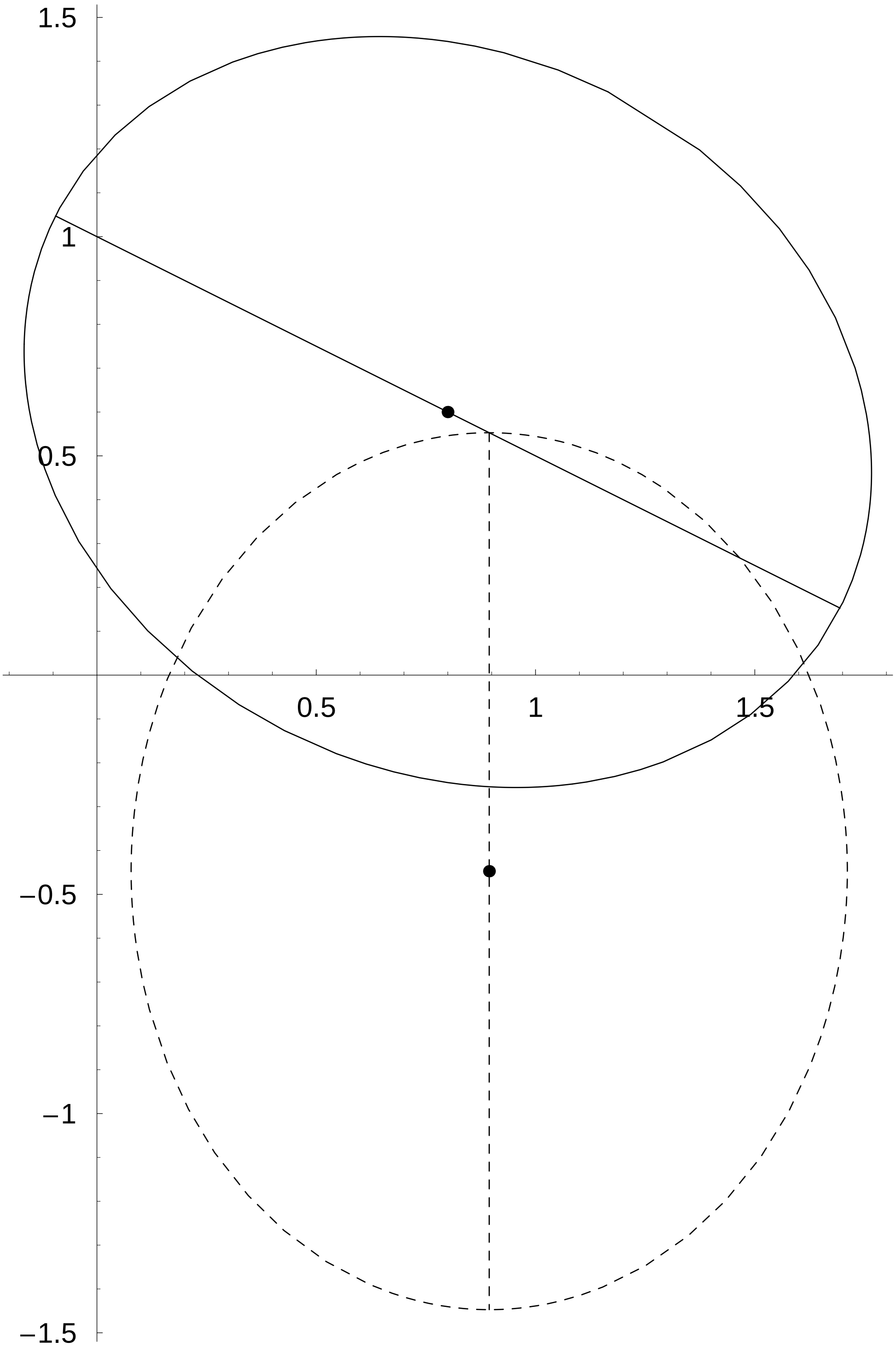
Cvičení 26. $\Omega(x,y) = 11x^2 + 4xy + 14y^2 - 20x - 20y + 4.$

Vlastní čísla: $(15, 10)$. Vlastní vektory: $(1, 2)$, $(-2, 1)$.

Elipsa $\frac{3}{2}\Big(\xi - \frac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2 + \Big(\eta + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 = 1$ o středu $\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) \doteq (0.8944, -0.4472)$.

Střed elipsy $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (0.8, 0.6)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1.1071487$ v míře obloukové, tedy přibližně $63^\circ\, 26'\, 5.82''$.



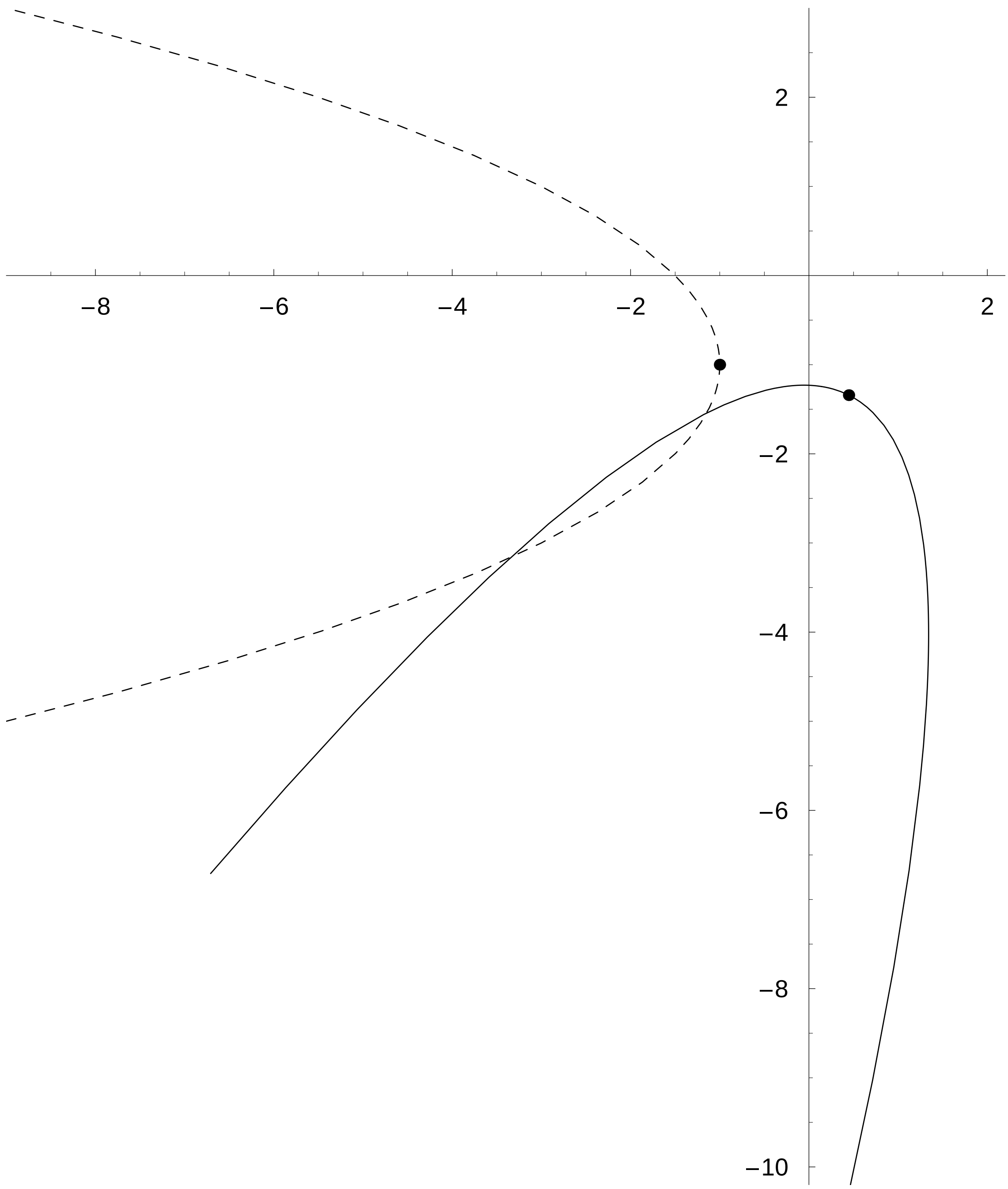
Cvičení 27. $\Omega(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + -2\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y + 15.$

Vlastní čísla: $(0,5)$. Vlastní vektory: $(1,2)$, $(-2,1)$.

Parabola $\xi + 1 = -\frac{1}{2}(\eta+1)^2$ s vrcholem $(-1,-1)$.

Vrchol paraboly $\Omega(x,y) = 0$: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = (0.4472, -1.3416)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1.1071487$ v míře obloukové, tedy přibližně $63^\circ\, 26'\, 5.82''$.



Cvičení 28. $\Omega(x,y) = 5x^2 - 40xy + 35y^2 + 16\sqrt{10}x - 22\sqrt{10}y + 30$.

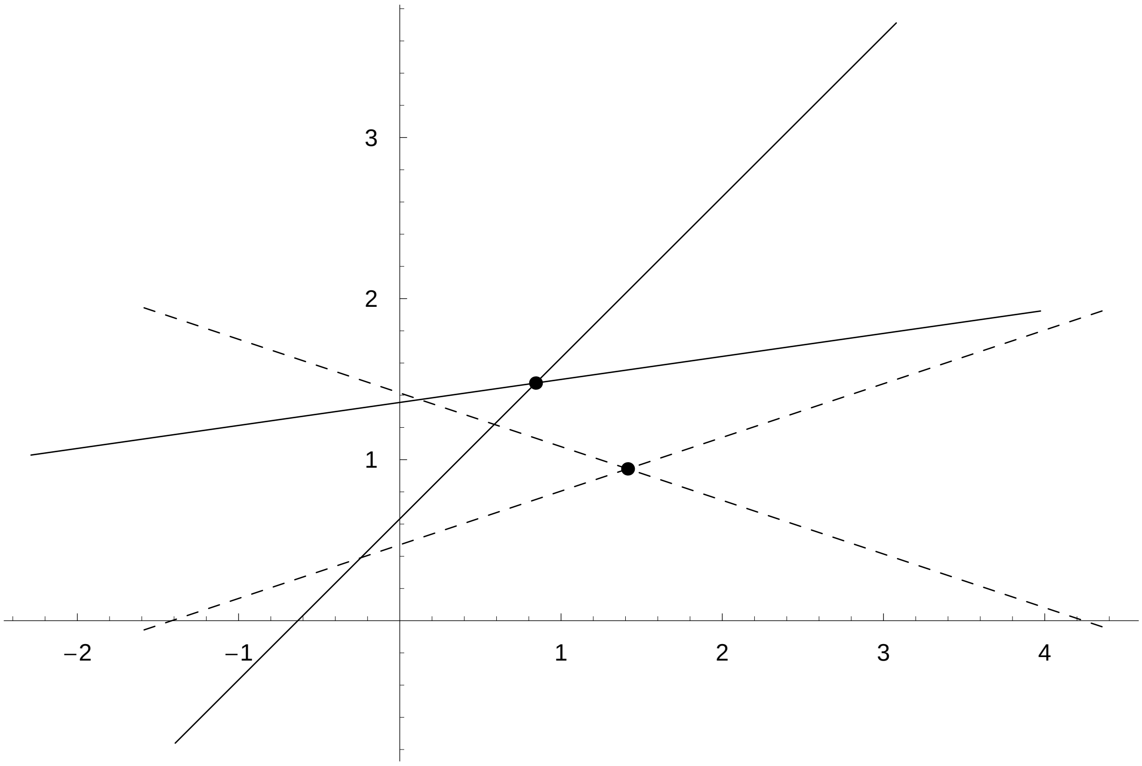
Vlastní čísla: $(-5, 45)$. Vlastní vektory: $(2,1)$, $(-1,2)$.

Rovnice $(\xi - \sqrt{2})^2 = 9(\eta - \frac{2}{3}\sqrt{2})^2$ popisuje různoběžky $\eta = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{2} \pm \xi\right)$ s průsečíkem $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \doteq (0.9428, 0.9428)$; svírají úhel $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} \doteq 0.64350111$, tedy přibližně $36°\,52'\,11.63''$.

Různoběžky $\Omega(x,y) = (5x - 5y + \sqrt{10})(x - 7y + 3\sqrt{10}) = 0$ se protínají v bodě

$$\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{5}}, \tfrac{7}{3}\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) \doteq (0.8433, 1.4757).$$

Úhel otočení: $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \doteq 0.4636476$ v míře obloukové, tedy přibližně $26°\,33'\,54.18''$.



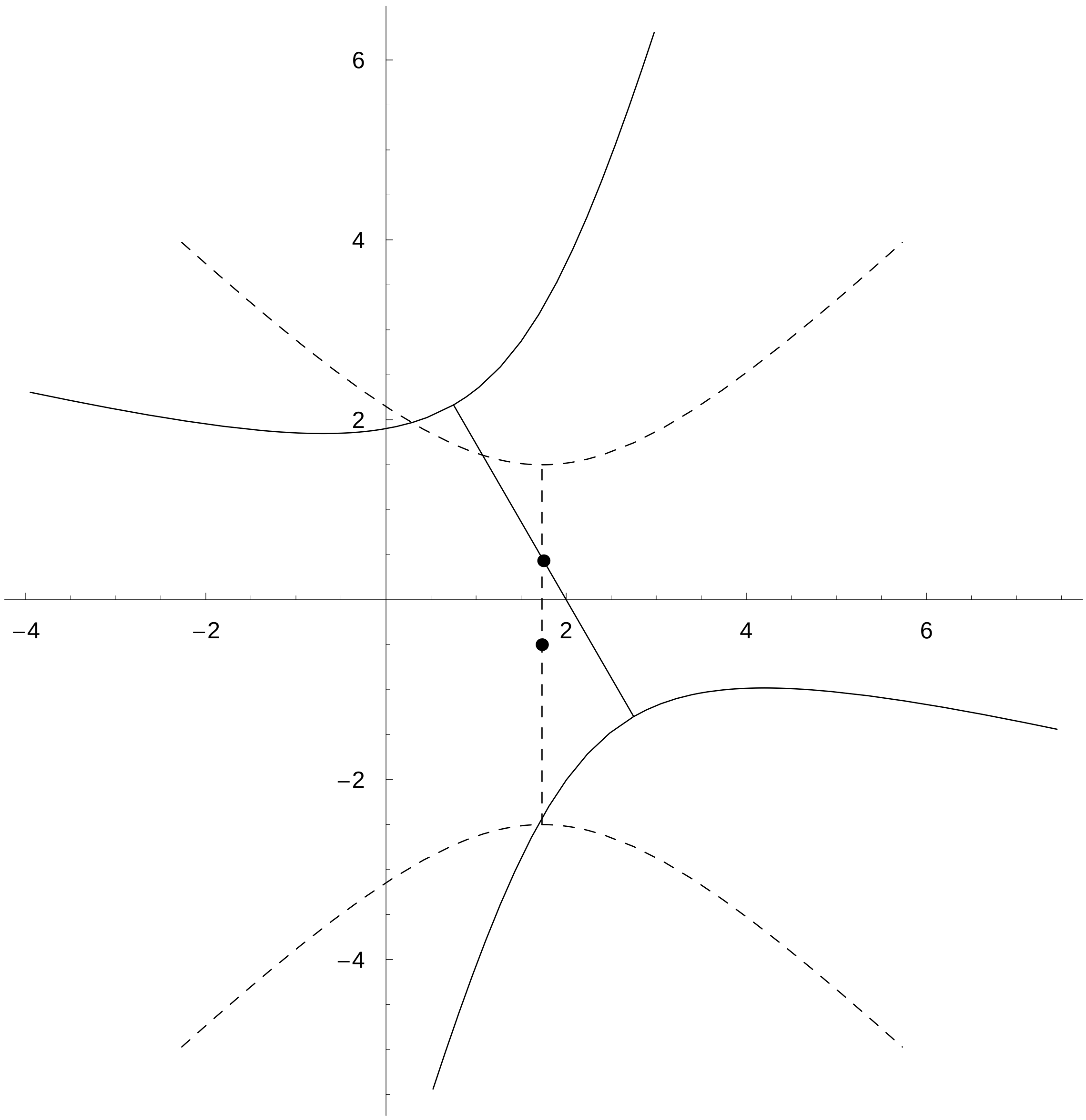
Cvičení 29. $\Omega(x,y) = -2x^2 - 4\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10x + 6\sqrt{3}y - 27.$

Vlastní čísla: $(-4,4)$. Vlastní vektory: $(\sqrt{3},1)$, $(-1,\sqrt{3})$.

Rovnoosá hyperbola $-\frac{1}{4}\left(\xi - \sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\eta + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ o středu $\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) \doteq (1.7321, -0.5000)$.

Střed hyperboly $\Omega(x,y) = 0$: $\frac{1}{4}(7,\sqrt{3}) \doteq (1.7500, 0.4330)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\pi$ v míře obloukové, tedy $30°$.



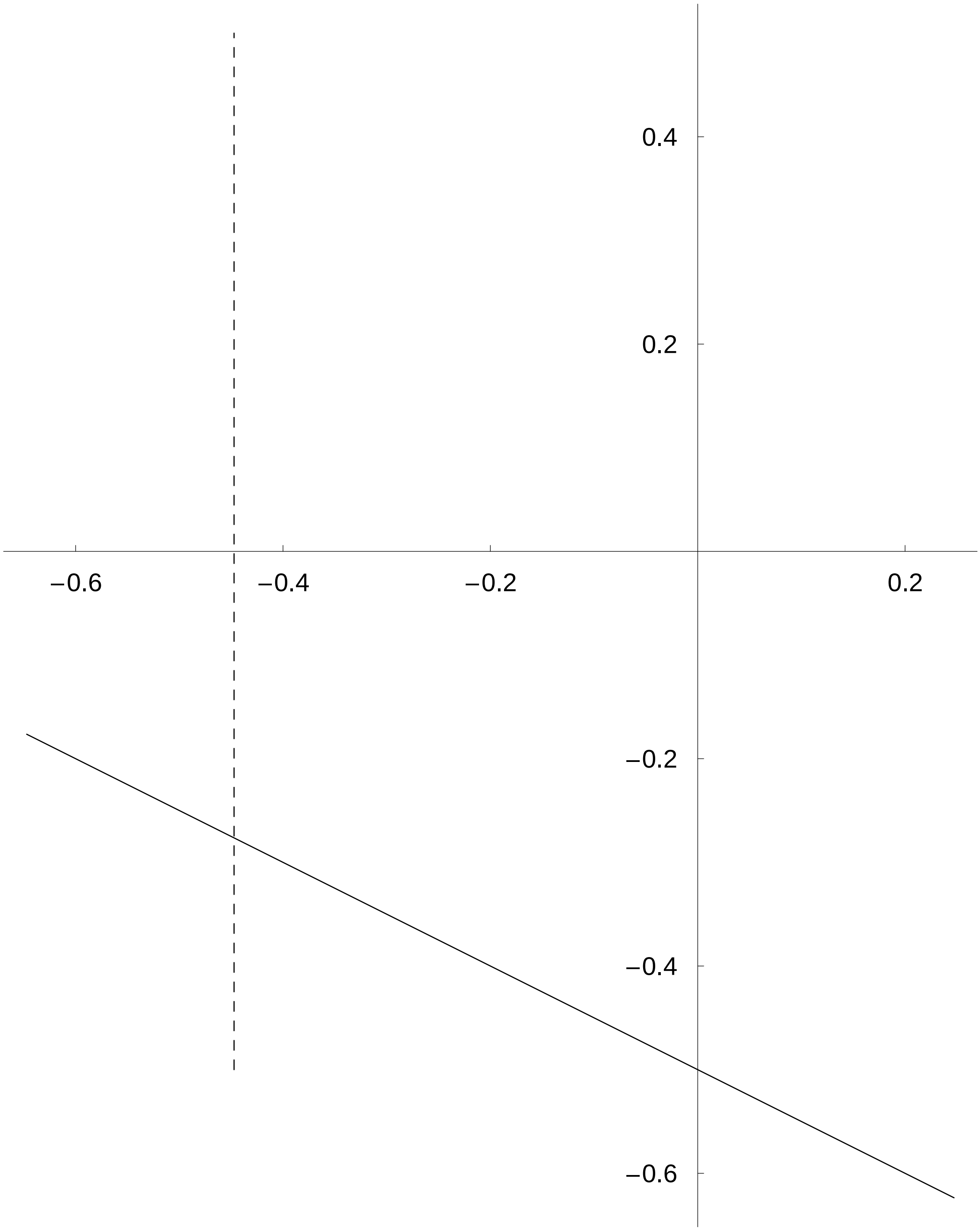
Cvičení 30. $\Omega(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1$.

Vlastní čísla: $(5, 0)$. Vlastní vektory: $(1, 2)$, $(-2, 1)$.

„Dvojnásobná“ přímka $\left(\xi + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 = 0$, tj. $\xi = -\sqrt{\frac{1}{5}} \doteq -0.4472$.

„Dvojnásobná“ přímka $\Omega(x,y) = 0 : y = -\frac{1}{2}(x+1)$.

Úhel otočení: $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1.107149$ v míře obloukové, tedy přibližně $63^\circ\, 26'\, 5.82''$.



5. Kvadriky

Definice. Kvadrikou neboli **kvadratickou plochou** rozumíme množinu všech bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících rovnici tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0\,, \tag{1}$$

kde koeficienty a_{jk}, b_j a c jsou reálná čísla, pro něž je

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_{jk}^2 > 0\,. \tag{2}$$

V této kapitole se nejdříve seznámíme s jednotlivými typy kvadrik a pak provedeme jejich úplnou klasifikaci.

Prvním krokem k rozeznání, o jakou kvadriku se jedná, je převedení „kvadratické části“ levé strany rovnice (1), tedy kvadratické formy

$$K(x, y, z) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2\,, \tag{3}$$

na diagonální tvar; poznamenejme, že vzhledem k (2) není tato forma identicky nulová.

Jak víme, lze to provést tak, že najdeme vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 symetrické matice

$$\Lambda := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a pomocí vhodných vlastních vektorů utvoříme kladnou ortonormální bázi $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$; v této nové bázi, v níž budeme souřadnice bodů značit ξ, η a ζ, bude mít forma (3) diagonální tvar [1])

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2\,. \tag{5}$$

Protože mlčky předpokládáme, že x, y, z jsou souřadnice bodů při bázi $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, bude

$$M := \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

kde $f_j = (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3})$, $j = 1, 2, 3$, matice přechodu od báze $\mathfrak{E}$ k bázi $\mathfrak{F}$, a příslušná transformace souřadnic bude mít tvar $(x, y, z) = M^T(\xi, \eta, \zeta)$, tj. tvar

$$\begin{aligned} x &= f_{11}\xi + f_{21}\eta + f_{31}\zeta\,, \\ y &= f_{12}\xi + f_{22}\eta + f_{32}\zeta\,, \\ z &= f_{13}\xi + f_{23}\eta + f_{33}\zeta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Z obecné teorie plyne, že výsledkem dosazení x, y, z do formy (3) podle rovnic (7) bude forma (5); v konkrétních situacích stačí proto dosazovat do „lineární části“

$$b_1x + b_2y + b_3z + c \tag{8}$$

levé strany rovnice (1) a celý výsledek dosazení pak event. upravit na nějaký přehledný tvar.

V porovnání s dvojrozměrným případem (tedy s kuželosečkami) je situace v $\mathbb{R}^3$ o dost složitější:

1) Nemusíme umět rozřešit charakteristickou rovnici $\det(\Lambda - \lambda E) = 0$, protože jde o rovnici *kubickou.*

2) I když se nám to podaří, mohou být kořeny tak složité výrazy, že nalezení příslušných jednotkových vlastních vektorů může být početně značně náročné.

3) Typů kvadrik je podstatně více než kuželoseček.

V dalším textu jednotlivé typy kvadrik popíšeme podrobněji.

[1]) viz větu 13

5.1. Elipsoidy

Elipsoid má ve své nejjednodušší poloze popis

$$
\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\,, \tag{9}
$$

kde a, b, c jsou kladná čísla – tzv. **délky poloos** elipsoidu. Elipsoid (9) je zřejmě obsažen v kvádru $\langle -a, a\rangle \times \langle -b, b\rangle \times \langle -c, c\rangle$ a má s každou stěnou tohoto kvádru společný právě jeden bod; body $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ se nazývají **vrcholy** elipsoidu. Je-li $|\,z_0\,| < c$, popisuje rovnice

$$
\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 , \tag{10}
$$

průnik elipsoidu s rovinou $z = z_0$ a je patrné, že jde o elipsu o délce poloos

$$
a\sqrt{1 - (z_0/c)^2}\,, \quad b\sqrt{1 - (z_0/c)^2}\,;
$$

podobně jsou elipsami průniky elipsoidu s rovinami $x = x_0$, kde $|\,x_0\,| < a$, resp. $y = y_0$, kde $|\,y_0\,| < b$.

Poznamenejme ještě, že (9) je rovnice elipsoidu se **středem** v počátku; obecnější rovnice

$$
\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{c}\right)^2 = 1\,, \tag{9*}
$$

popisuje **elipsoid o středu** (x_0, y_0, z_0).

Jsou-li dvě z čísel a, b, c stejná, říkáme, že elipsoid (9) je **rotační**; je-li $a = b = c$, je tento elipsoid **sférou** (tj. povrchem koule). Je-li např. $a = b$ a $|\,z_0\,| < c$, je zřejmé, že rovnice (10) popisuje kružnici.

Příklad 19. Vyšetřme množinu všech kořenů (x, y, z) rovnice

$$
3x^2 - 4xy - 2xz + 3y^2 + 2yz + 4z^2 - 6x - 6z + 8 = 0\,. \tag{11}
$$

Je $^{\mathrm{pt}}$

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{12}
$$

a charakteristická rovnice

$$
-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 = 0 \tag{13}
$$

má kořeny 6, 3 a 1.

Rovnici $(\Lambda - 6E)u = 0$, kde $u = (u_1, u_2, u_3)$, lze ekvivalentně napsat jako tři rovnice

$$
-3u_1 - 2u_2 - u_3 = 0\,, \quad -2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0\,, \quad -u_1 + u_2 - 2u_3 = 0\,, \tag{14}
$$

které splňuje např. vektor $u = (-1, 1, 1)$ s normou $1/\sqrt{3}$. [2]) Jednotkový vektor

$$
f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-1, 1, 1) \tag{15}
$$

bude prvním vektorem konstruované báze.

Pro vlastní číslo 3 resp. 1 dostaneme obdobně rovnice $(\Lambda - 3E)u = 0$ resp. $(\Lambda - E)u = 0$, tedy rovnice

$$
-2u_2 - u_3 = 0\,,\ -2u_1 + u_3 = 0,\ -u_1 + u_2 + u_3 = 0
$$

resp.

$$
2u_1 - 2u_2 - u_3 = 0\,,\ -2u_1 + 2u_2 + u_3 = 0\,,\ -u_1 + u_2 + 3u_3 = 0\,;
$$

splňuje je např. vektor $(1, -1, 2)$ s normou $\sqrt{6}$ resp. vektor $(1, 1, 0)$ s normou $\sqrt{2}$. K vektoru f_1 přidáme proto vektory

$$
f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, -1, 2) \quad \text{a} \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1, 0)\,. \tag{16}
$$

---

[2]) Jistě nás neudivuje, že rovnice nejsou nezávislé, protože při hledání vlastních vektorů řešíme *vždy* soustavu se singulární maticí, v případě kvadrik tedy s maticí, jejíž hodnost je < 3.

Maticí přechodu od báze $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ k bázi $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ je matice

$$M = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

jejíž determinant je – jak se snadno přesvědčíme – roven 1; báze je tedy nejen ortonormální, ale zároveň kladná. [3])

Po transformaci souřadnic dané rovnicemi

$$(x, y, z) = M^T(\xi, \eta, \zeta), \quad \text{tj. } x = -\frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \; y = \frac{\xi}{\sqrt{3}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \; z = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\eta \tag{18}$$

se kvadratická část levé strany (11) změní (podle věty 13) na

$$6\xi^2 + 3\eta^2 + \zeta^2 \tag{19}$$

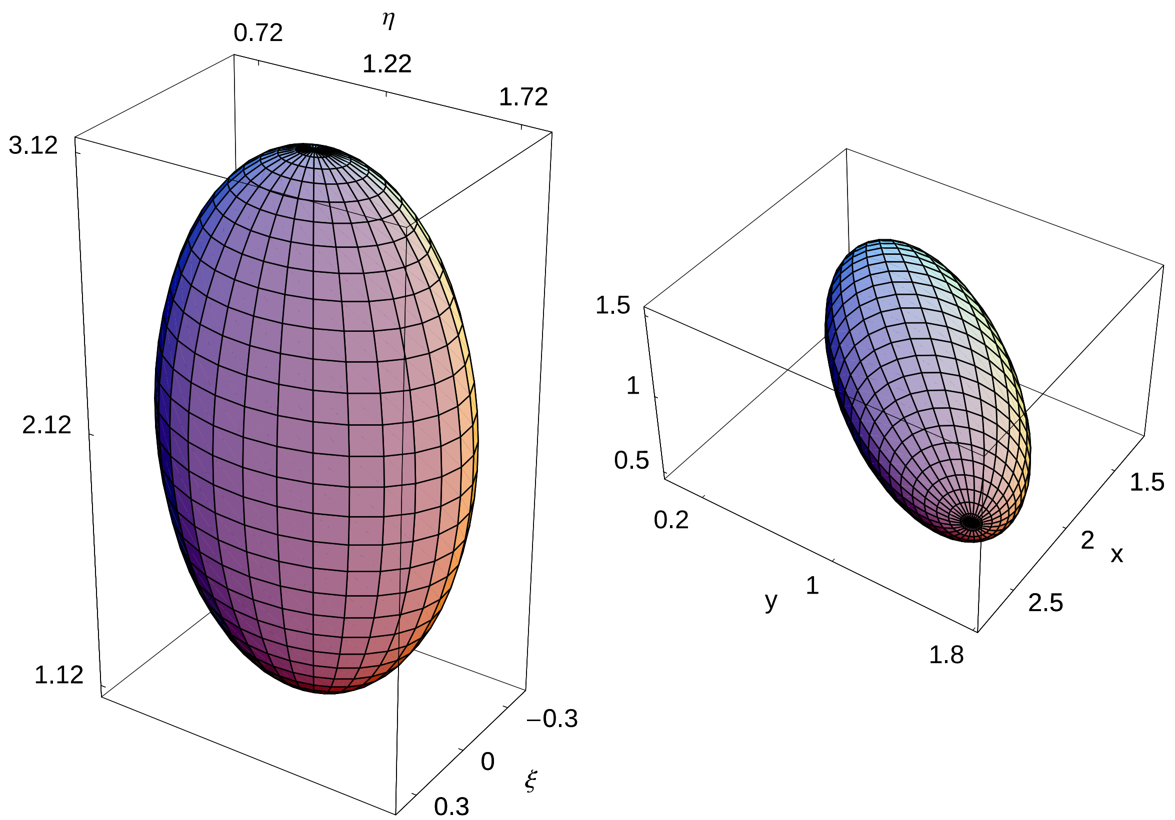
(takže nemusíme dosazovat!), lineární část přejde ve výraz

$$-3\sqrt{6}\eta - 3\sqrt{2}\zeta + 8. \tag{20}$$

Snadnou úpravou (kterou přenecháváme čtenáři) získáme v nové souřadnicové soustavě rovnici

$$6\xi^2 + 3\Big(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)^2 + \Big(\zeta - \frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 1, \tag{21}$$

která popisuje elipsoid o středu $s = (0, \sqrt{3/2}, 3/\sqrt{2}) \doteq (0, 1.22, 2.12)$ a délce poloos $1/\sqrt{6} \doteq 0.41$, $1/\sqrt{3} \doteq 0.58$, 1. Středem původního elipsoidu (11) je bod $(M^T)^{-1}s = (2, 1, 1)$.



K PŘÍKLADU 19: VLEVO ELIPSOID (21), VPRAVO ELIPSOID (11)

[3]) Jednodušší je počítat determinant o řádcích $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(1, 1, 0)$; protože je roven *kladnému* číslu 6, je báze kladná.

5.2. Hyperboloidy

Na rozdíl od roviny, kde jsou všechny hyperboly „téhož typu" (přesně řečeno: pro každé dvě hyperboly existuje prostá lineární funkce, která jednu z nich převádí na druhou), existují v $\mathbb{R}^3$ dva „zásadně odlišné" typy hyperboloidů: jednodílné a dvojdílné.

5.2a. Jednodílný hyperboloid o **středu** (x_0, y_0, z_0) má rovnici

$$s_1\Big(\frac{x-x_0}{a}\Big)^2 + s_2\Big(\frac{y-y_0}{b}\Big)^2 + s_3\Big(\frac{z-z_0}{c}\Big)^2 = 1\,, \tag{22}$$

kde **délky poloos** a, b, c hyperboloidu jsou kladná čísla a kde *dvě* z čísel s_j, $j = 1, 2, 3$, jsou rovna $+1$ a zbývající se rovná -1. Pro určitost budeme předpokládat, že $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = -1$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, tj. budeme vyšetřovat hyperboloid popsaný rovnicí

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = 1\,, \tag{23}$$

jehož střed leží v počátku souřadnicové soustavy.

Vyšetříme průniky tohoto hyperboloidu s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami. Je-li z pevné, je

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 \tag{24}$$

rovnice elipsy (o poloosách délek $a\sqrt{1+(z/c)^2}$, $b\sqrt{1+(z/c)^2}$; čím je $|z|$ větší, tím delší jsou poloosy.

Je-li pevné např. x, pišme

$$\Big(\frac{y}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = 1 - \Big(\frac{x}{a}\Big)^2; \tag{25}$$

jak je patrné, mohou nastat dvě situace: 1) $x = \pm a$ – pak je vpravo nula a

$$\Big(\frac{y}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{c}z \tag{26}$$

popisuje dvojici různoběžek; 2) $|x| \neq a$ – pak (25) popisuje hyperbolu. Podobné výsledky získáme při pevném y.

Průniky hyperboloidu s rovinami kolmými k ose z jsou tedy elipsy (které jsou kružnicemi, je-li $a = b$ – v tom případě se jedná o tzv. **rotační hyperboloid**), průniky hyperboloidu s rovinami kolmými k ose x resp. y jsou hyperboly nebo různoběžky.

Příklad 20. Vyšetřme množinu všech kořenů rovnice

$$x^2 - 2xy - 2xz + y^2 - 2yz - z^2 - 6x - 14y - 8z = 12\,. \tag{27}$$

Matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

má charakteristickou rovnici

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \tag{29}$$

s kořeny $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 2$. Je-li $u = (u_1, u_2, u_3)$, splňují řešení rovnic $(\Lambda - \lambda_j)u = 0$ po řadě podmínky

$$2u_1 = 2u_2 = u_3 \quad \text{resp.} \quad u_1 = u_2 = -u_3 \quad \text{resp.} \quad u_1 + u_2 = 0,\, u_3 = 0\,,$$

takže za (jednotkové) vlastní vektory můžeme zvolit např.

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\,, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\,, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\,, \tag{30}$$

které tvoří kladnou ortonormální bázi $\mathfrak{F}$.

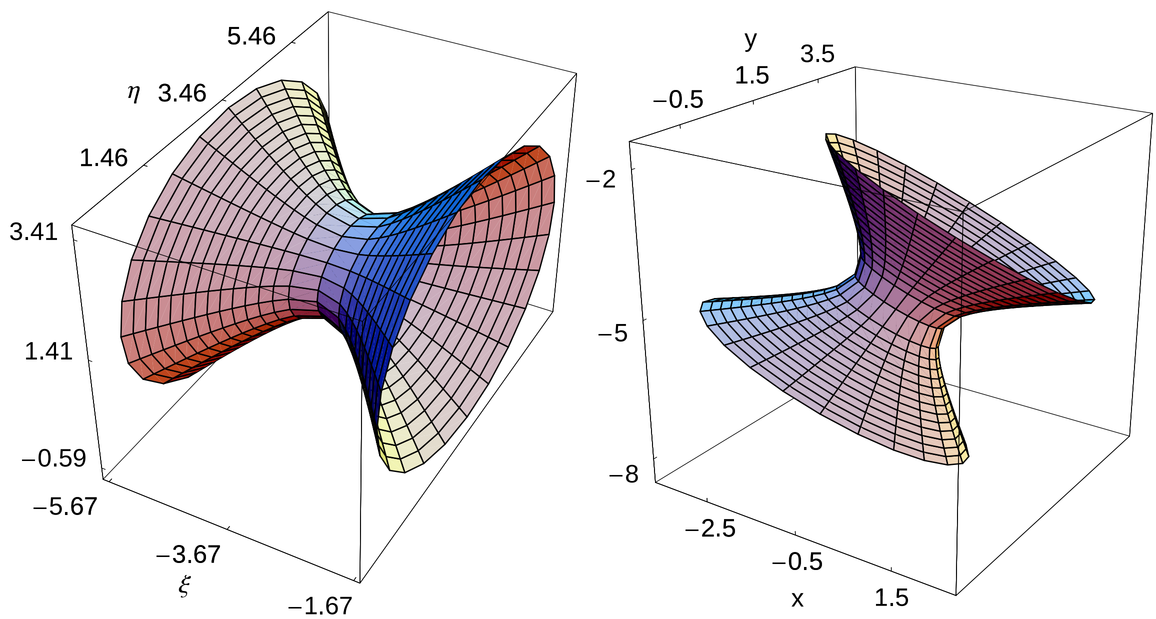
Transformační rovnice pro přechod od souřadnic v bázi $\mathfrak{F}$ k souřadnicím v bázi $\mathfrak{E}$ mají tvar

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\eta}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\eta}{\sqrt{3}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}}; \tag{31}$$

dosazením do (27) a evidentní úpravou získáme tento popis kvadriky v nových souřadnicích:

$$-2\Big(\xi + \tfrac{3}{2}\sqrt{6}\Big)^2 + (\eta - 2\sqrt{3})^2 + 2(\zeta - \sqrt{2})^2 = 1. \tag{32}$$

Jedná se tedy o jednodílný hyperboloid, jehož průniky s rovinami kolmými k ose ξ jsou elipsy. Má střed v bodě $(-3\sqrt{6}/2, 2\sqrt{3}, \sqrt{2}) \doteq (-3.67, 3.46, 1.41)$, poloosy mají délky $1/\sqrt{2} \doteq 0.71$, 1, $1/\sqrt{2}$. Středem původního hyperboloidu (27) je bod $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -5)$.



K PŘÍKLADU 20: VLEVO HYPERBOLOID (32), VPRAVO HYPERBOLOID (27)

5.2b. Dvojdílný hyperboloid o **středu** (x_0, y_0, z_0) má rovnici

$$s_1\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 + s_2\Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 + s_3\Big(\frac{z - z_0}{c}\Big)^2 = 1, \tag{33}$$

kde **délky poloos** a, b, c hyperboloidu jsou kladná čísla a kde *jedno* z čísel s_j, $j = 1, 2, 3$, je rovno $+1$ a zbývající dvě se rovnají -1. Pro určitost budeme předpokládat, že $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = -1$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, tj. budeme vyšetřovat hyperboloid o rovnici

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 - \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 - \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = 1, \tag{34}$$

jehož střed leží v počátku souřadnicové soustavy.

Vyšetříme průniky tohoto hyperboloidu s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami. Je-li x pevné, je

$$\Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 - 1, \tag{35}$$

z čehož je patrné, že

1) $|x| < a \Rightarrow$ průnik s příslušnou rovinou je prázdný,
2) $|x| = a \Rightarrow$ průnik je jednobodový (rovný $\{(\pm a, 0, 0)\}$),
3) $|x| > a \Rightarrow$ průnik je elipsa.

Je-li pevné např. y, pišme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2; \tag{36}$$

jak je patrné, průnikem hyperboloidu (34) s každou rovinou kolmou k ose y je hyperbola. Totéž zřejmě platí o průniku tohoto hyperboloidu s každou rovinou kolmou k ose z.

Z toho, co jsme odvodili, plyne, že dvojdílný hyperboloid (34) se skládá ze dvou disjunktních částí: Jedna z nich leží v poloprostoru $x \leq -a$, druhá v poloprostoru $x \geq a$; v prostorové vrstvě charakterizované nerovnostmi $-a < x < a$ neleží žádný bod hyperboloidu.

Poznámka 18. Tak jako se jednodílný hyperboloid (22) nazývá „rotační" v případě, že $a = b$, říkáme, že hyperboloid (34) je **rotační** v případě, že $b = c$. Tyto názvy jsou zcela přirozené, protože jednodílný resp. dvojdílný rotační hyperboloid o rovnici

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \text{ resp. } \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \tag{37}$$

vznikne rotací hyperboly o rovnici

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \tag{38}$$

kolem osy z resp. kolem osy x.

Příklad 21. Vyšetřme množinu všech bodů (x, y, z), pro něž je

$$x^2 + 14xy - 6xz + y^2 + 6yz + z^2 + 1 = 0. \tag{39}$$

Matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

má charakteristickou rovnici

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 64\lambda - 192 = 0 \tag{41}$$

s kořeny -8, 3 a 8.

V tomto případě stačí již znalost těchto vlastních čísel k tomu, abychom rozeznali, že rovnice (39) popisuje dvojdílný hyperboloid; opakujme znovu, že obecná teorie (věta 13) umožňuje napsat diagonální tvar kvadratické formy v nových souřadnicích (v kladné bázi složené z jednotkových vlastních vektorů matice (40)), aniž bychom tyto vlastní vektory znali. Transformační rovnice charakterizující přechod od báze $\{e_1, e_2, e_3\}$ k této nové bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$ bychom potřebovali jen v případě, že by lineární část výrazu na levé straně (39) nebyla konstantní. V našem případě je zřejmé, že v nových souřadnicích ξ, η, ζ bude mít (39) tvar $-8\xi^2 + 3\eta^2 + 8\zeta^2 + 1 = 0$, neboli

$$8\xi^2 - 3\eta^2 - 8\zeta^2 = 1, \tag{42}$$

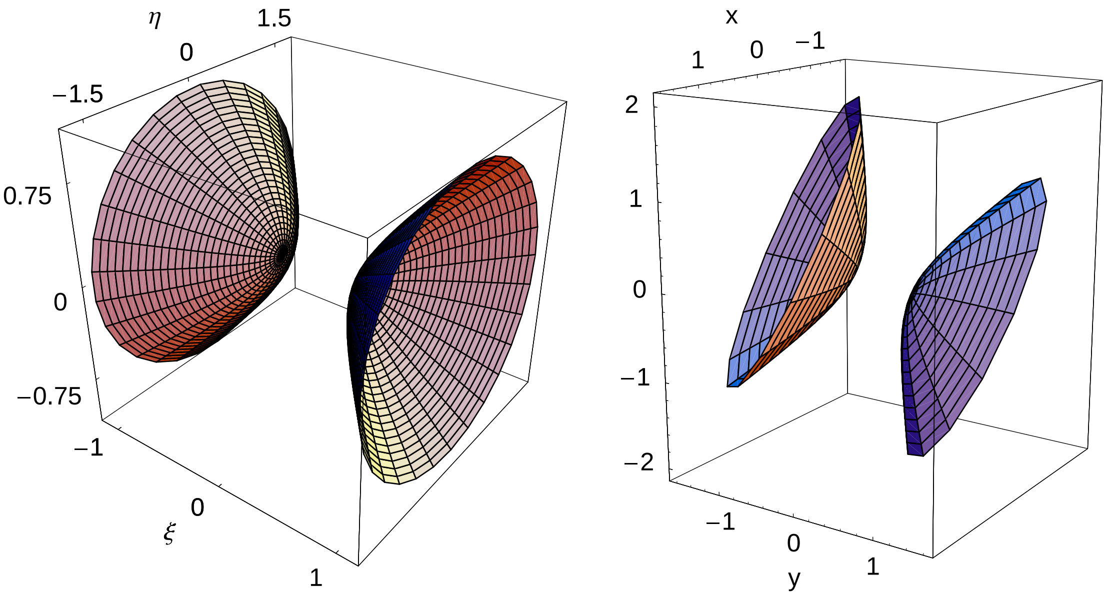
což dokazuje, že jde o dvojdílný hyperboloid neprotínající rovinu $\xi = 0$; má střed v počátku a délky poloos jsou po řadě rovny $1/\sqrt{8} \doteq 0.35$, $1/\sqrt{3} \doteq 0.58$, $1/\sqrt{8}$. Počátek je i středem původního hyperboloidu s popisem (39).

Pokud bychom z nějakých důvodů přece jen potřebovali transformační rovnice, postupovali bychom standardním způsobem: Vlastním číslům $-8, 3, 8$ matice Λ odpovídají např. jednotkové vlastní vektory

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{22}}(3, -3, 2), \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, -3), \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \tag{43}$$

které tvoří kladnou bázi, jak zjistíme výpočtem determinantu

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 22.$$



K PŘÍKLADU 21: VLEVO HYPERBOLOID (39), VPRAVO HYPERBOLOID (42)

Označíme-li M matici přechodu od báze $\{e_1, e_2, e_3\}$ k bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$, budou se příslušné souřadnice transformovat podle rovnice $(x, y, z) = M^T(\xi, \eta, \zeta)$, tedy podle rovnic

$$(44) \qquad x = \frac{3\xi}{\sqrt{22}} + \frac{\eta}{\sqrt{11}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{3\xi}{\sqrt{22}} - \frac{\eta}{\sqrt{11}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{2\xi}{\sqrt{22}} - \frac{3\eta}{\sqrt{11}}.$$

Poznamenejme, je hyperboloid (42) sice není rotační, ale jeho průniky s rovinami kolmými na osu η jsou *rovnoosé* hyperboly, je-li $\eta \neq \pm 1/\sqrt{3}$, a *ortogonální* přímky $\zeta = \pm\xi$, je-li $|\eta| = 1/\sqrt{3}$.

5.3. Paraboloidy

5.3a. Eliptický paraboloid lze v jedné z jeho nejjednodušších poloh popsat rovnicí tvaru

$$2pz = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2, \tag{45}$$

kde $p \neq 0$ je **parametr** paraboloidu a $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ jsou délky jeho **poloos**. Je-li $a = b$, mluvíme o paraboloidu **rotačním**. Protože pravá strana rovnice (45) je (pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) nezáporná, je při $p > 0$ (resp. $p < 0$) celý paraboloid obsažen v poloprostoru $z \geq 0$ (resp. $z \leq 0$); protože obě situace jsou podobné, předpokládejme v dalším, že $p > 0$.

Je-li $z = 0$, má rovnice (45) jen jedno řešení, totiž $x = y = 0$; počátek je **vrcholem** paraboloidu (45). Roviny s popisem $z = z_0 > 0$ protínají paraboloid (45) v elipsách

$$\Big(\frac{x}{a\sqrt{2pz_0}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{a\sqrt{2pz_0}}\Big)^2 = 1; \tag{46'}$$

délky poloos těchto elips se s rostoucím z_0 neomezeně zvětšují. Průniky *rotačního* paraboloidu s rovinami $z = z_0 > 0$ jsou ovšem kružnice. Rovina s rovnicí $y = y_0 \in \mathbb{R}$ resp. $x = x_0 \in \mathbb{R}$ protíná paraboloid (45) v parabole o rovnici

$$x^2 = 2pa^2\Big(z - \Big(\frac{y_0}{b\sqrt{2p}}\Big)^2\Big) \quad \text{resp.} \quad y^2 = 2pb^2\Big(z - \Big(\frac{x_0}{a\sqrt{2p}}\Big)^2\Big). \tag{46''}$$

Osou paraboloidu (45) je osa z; paraboloidy, jejichž osou je osa x resp. y dostaneme příslušnou záměnou souřadnic.

Paraboloid s obecnější polohou vrcholu (a osou rovnoběžnou s osou z) má rovnici

$$2p(z - z_0) = \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 \tag{45*}$$

a vznikl z paraboloidu (45) posunutím.

Příklad 22. Vyšetřme množinu všech kořenů kvadratické funkce

$$2x^2 + 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2 - x + z + \frac{1}{16}, \tag{47}$$

které odpovídá matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Charakteristickým polynomem této matice je polynom $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ s kořeny $0, 2, 3$. Řešením rovnice $(\Lambda - \lambda E)u = 0$ s těmito hodnotami λ dostaneme postupně jednotkové, navzájem ortogonální vektory

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2), \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \tag{49}$$

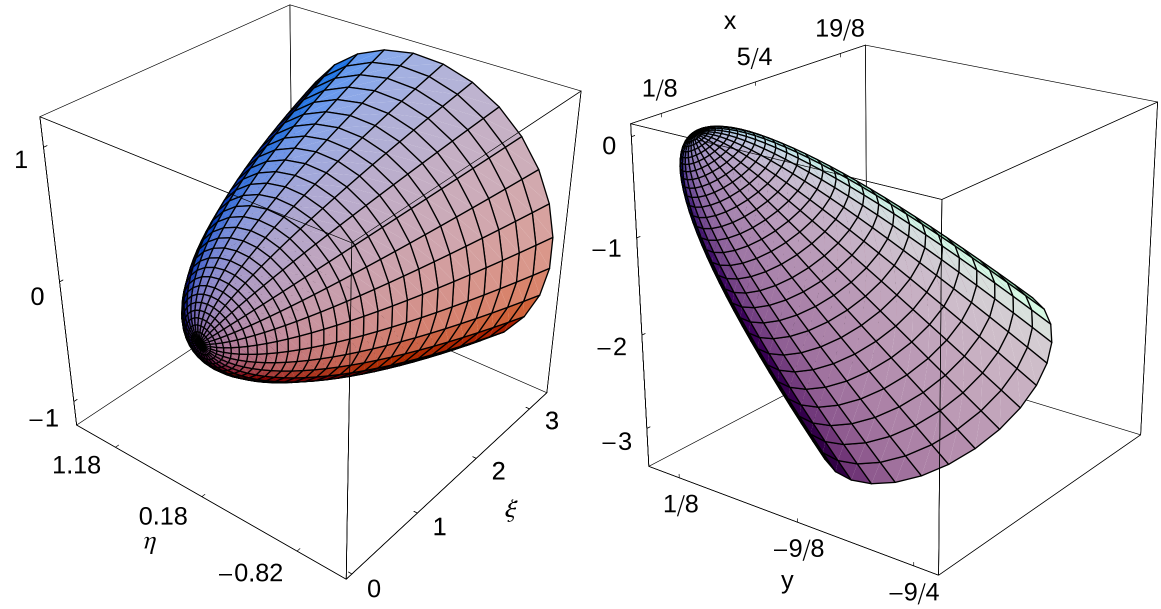
které tvoří kladnou bázi, protože determinant z jejich složek je roven 1. Označíme-li jako obvykle souřadnice bodů v této bázi ξ, η, ζ, budou

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad z = -\frac{2\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}} \tag{50}$$

příslušné transformační rovnice. Kvadratická část levé strany (47) přejde, jak víme, v kvadratickou formu $0 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \eta^2 + 3 \cdot \zeta^2$. Dosadíme proto jen do lineární části a po snadné úpravě získáme rovnici

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\xi = 2\Big(\eta - \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big)^2 + 3\zeta^2 \tag{51}$$

eliptického paraboloidu, jehož osa je rovnoběžná s osou ξ a jehož vrcholem je bod $(0, 1/(4\sqrt{2}), 0) \doteq (0, 0.18, 0)$. Vrcholem paraboloidu (47) je bod $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0)$.



K PŘÍKLADU 22: VLEVO PARABOLOID (51), VPRAVO PARABOLOID (47)

5.3b. Hyperbolický paraboloid má v jedné ze svých nejjednodušších poloh rovnici tvaru

$$2pz = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 - \Big(\frac{y}{b}\Big)^2, \tag{52}$$

kde $p \in \mathbb{R}_+$ je **parametr** paraboloidu a kde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ jsou **délky** jeho **poloos**. Posunutím získáme rovnici

$$2p(z - z_0) = \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 - \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 \tag{52*}$$

hyperbolického paraboloidu v obecnější poloze; (x_0, y_0, z_0) je tzv. **sedlový bod** paraboloidu (52*). Hyperbolickým paraboloidem nazýváme samozřejmě i každou množinu, která z (52*) vznikne permutací souřadnic a otočením.

1. Průnik s rovinou $z = 0$ je sjednocením různoběžných přímek o rovnicích $y = \pm bx/a$; průniky s ostatními rovinami kolmými k ose z jsou hyperboly. [4])

2. Je-li např. $y = y_0$ pevné, pišme místo (52) raději

$$2p\Big(z + \Big(\frac{y_0}{b\sqrt{2p}}\Big)^2\Big) = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2,$$

abychom lépe viděli, že průnikem příslušné roviny s paraboloidem (52) je parabola „s vrcholem dolů“.

3. Průnik paraboloidu (52) s každou rovinou s popisem $x = x_0 \in \mathbb{R}$ je zřejmě opět parabola, tentokrát však „s vrcholem nahoru“.

Poznámka 19. Otočíme-li v rovině xy souřadnicové osy o $45°$, vznikne z rozdílu $y^2 - x^2$ (až na multiplikativní konstantu) součin xy; z toho plyne, že graf funkce xy, tedy množina

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = xy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \tag{53}$$

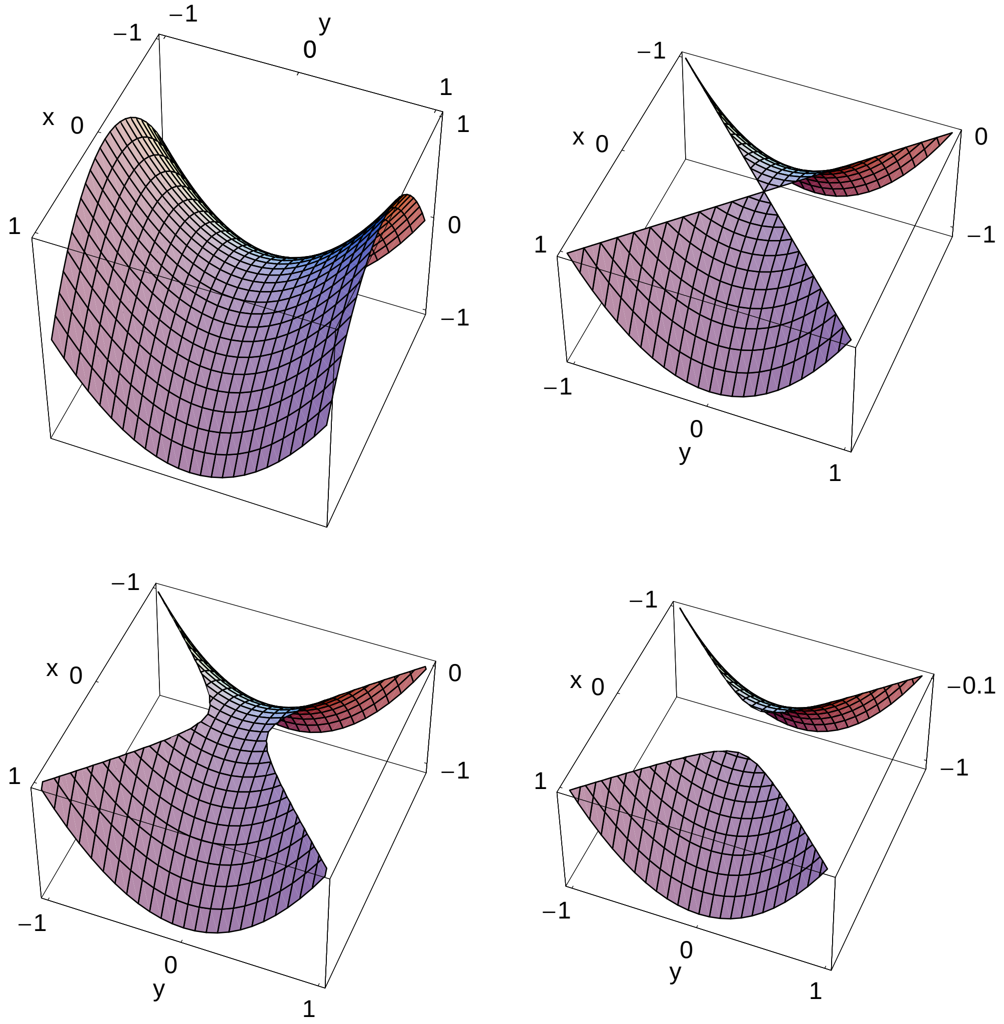
je též hyperbolický paraboloid.

Příklad 23. Vyšetřme množinu všech bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících rovnici

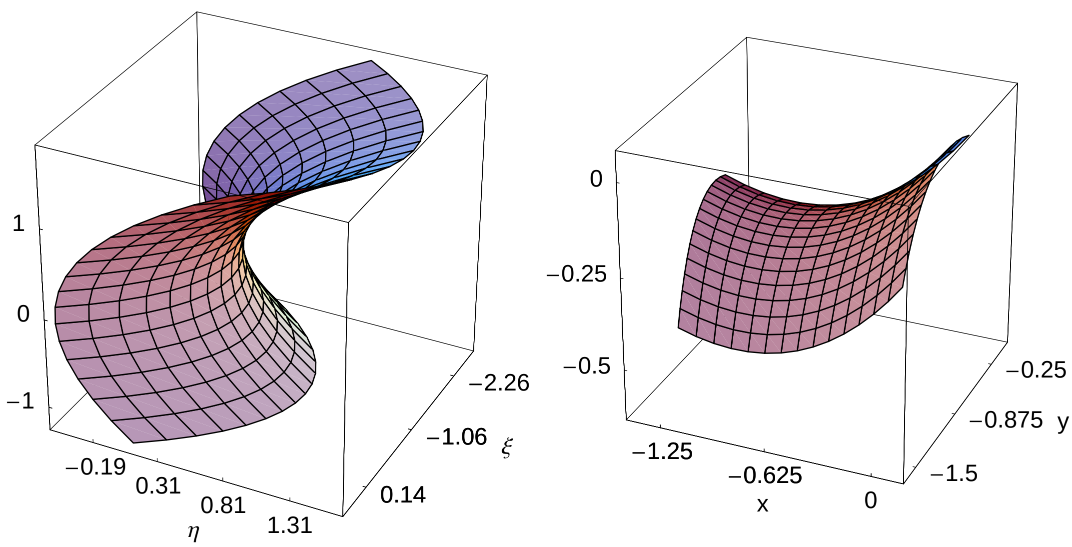
$$-4xy + 2xz - 2yz + z^2 - 6x + 6z = 0. \tag{54}$$

---

[4]) Na obrázku s titulem „Řezy hyperbolickým paraboloidem“ je vlevo nahoře graf restrikce funkce $y_2 - x^2$ na interval $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$, nahoře vpravo je jeho část odpovídající $z \le 0$ (průnik roviny $z = 0$ s paraboloidem je sjednocení dvou (v tomto případě ortogonálních) přímek); levý resp. pravý obrázek dole obsahuje jen část grafu, která odpovídá $z \le 0.05$ resp. $z \le -0.05$ (průniky grafu s rovinami $z = 0.05$ a $z = -0.05$ jsou hyperboly).



Řezy hyperbolickým paraboloidem



Hyperbolický paraboloid z příkladu 23:
Vlevo paraboloid (58), vpravo paraboloid (54)

Příslušnou maticí je

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{55}
$$

a charakteristická rovnice $-\lambda^3 + \lambda^2 + 6\,\lambda = 0$ má kořeny $-2, 0, 3$. Těmto vlastním číslům matice (55) odpovídají např. jednotkové vlastní vektory

$$
f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1, 0)\,, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, -1, -2)\,, \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-1, 1, -1)\,; \tag{56}
$$

matice sestavená z jejich složek má determinant rovný 1, takže báze složená z vektorů (56) je kladná. Dosadíme-li do (54) transformační vztahy

$$
x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\zeta}{\sqrt{3}}\,, \quad y = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}\,, \quad z = -\frac{2\,\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\zeta}{\sqrt{3}}\,, \tag{57}
$$

dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$
3\sqrt{6}\Big(\eta - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\Big) = -2\Big(\xi + \frac{3}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + 3\,\zeta^2 \tag{58}
$$

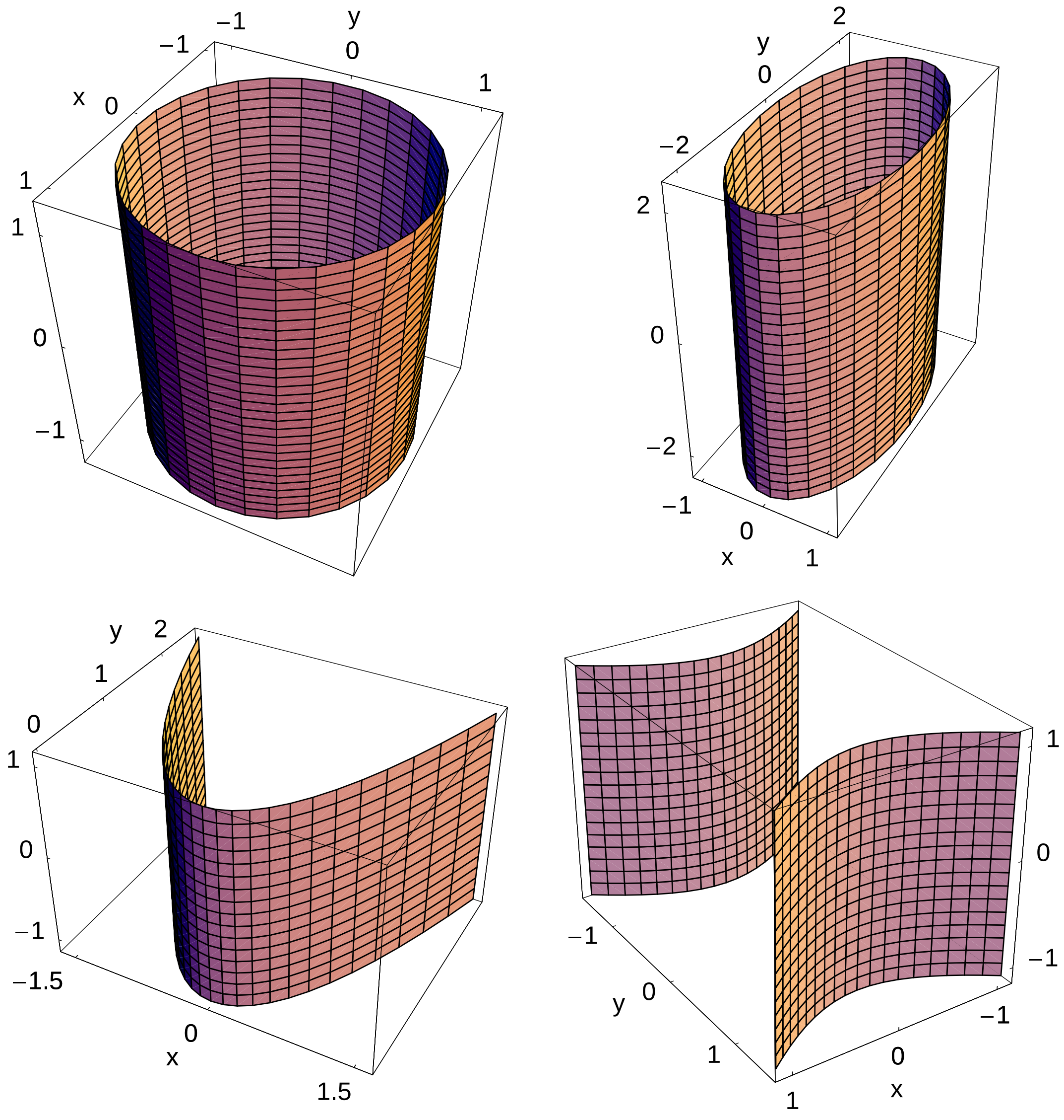
popisující hyperbolický paraboloid na obrázku na předcházející stránce vlevo.

Sedlovým bodem paraboloidu (58) je bod $(-\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\sqrt{6}, 0) \doteq (-1,06, 0.31, 0)$, sedlovým bodem paraboloidu (54) bod $-\frac{1}{8}\,(5, 7, 2) \doteq -(0.625, 0.875, 0.25)$.

5.4. Válce

Válce jsou dalším důležitým typem kvadrik; vzniknou tak, že např. v rovině xy zvolíme nějakou kuželosečku K, každým jejím bodem vedeme přímku rovnoběžnou s osou z a všechny tyto přímky sjednotíme. Podle toho, která kuželosečka byla zvolena, mají válce své názvy: Existuje tedy **válec kruhový** neboli **rotační**, **válec eliptický**, **parabolický** a **hyperbolický**. Protože mezi kuželosečky počítáme i přímky a dvojice (rovnoběžných nebo různoběžných) přímek, je nutné zařadit mezi válce i roviny a dvojice (rovnoběžných nebo různoběžných) rovin; protože mezi kuželosečky patří i každá jednobodová množina a dokonce i množina prázdná, je důsledné zařadit mezi válce i přímky a prázdnou množinu. Válcem nazýváme samozřejmě i každou množinu, která vznikne z některé právě popsané množiny (v níž jsme za „základní“ rovinu zvolili rovinu xy) permutací souřadnic, otočením a posunutím.

Na následujícím obrázku jsou nakresleny 4 nejběžnější typy válců.



Válec kruhový, eliptický, parabolický a hyperbolický

Předpokládejme však znovu, že kuželosečka, z níž válec vzniká, je částí roviny xy, takže jde o množinu tvaru

$$\{(x,y)\,;\,F(x,y)=0\}, \tag{59}$$

kde F je kvadratická funkce dvou proměnných x, y. Příslušný válec je pak zřejmě množina

$$\{(x,y,z)\,;\,F(x,y)=0\,,\ z\in\mathbb{R}\}. \tag{59*}$$

V podobné situaci je zvykem říkat, že $F(x,y)=0$ je *rovnice kuželosečky*; je to však i *rovnice* příslušného *válce*. Podstatný rozdíl je v tom, ve kterém eukleidovském prostoru pracujeme: $F(x,y)=0$ je rovnice kuželosečky, pracujeme-li v $\mathbb{R}^2$, ale je to rovnice válce, pracujeme-li v $\mathbb{R}^3$! (Příklad: Pracujeme-li v rovině, je $F(x,y):=x^2+y^2-1=0$ rovnice (jednotkové) kružnice; pracujeme-li však v prostoru, jde o rovnici válce $\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2=1, z\in\mathbb{R}\}$!)

Příklad 24. Vyšetříme, jakou kvadriku popisuje rovnice

$$2x^2+2xz+2y^2+2yz+z^2-6x+2y-2z=1. \tag{60}$$

Matice

$$\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} \tag{61}$$

příslušná ke kvadratické části levé strany (60) má charakteristickou rovnici $-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda=0$, jejímiž kořeny jsou vlastní čísla $0,2,3$. Jak snadno zjistíme, tvoří příslušné vlastní vektory

$$f_1=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2),\quad f_2=\frac{1}{\sqrt2}(-1,1,0),\quad f_3=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1) \tag{62}$$

kladnou ortonormální bázi a

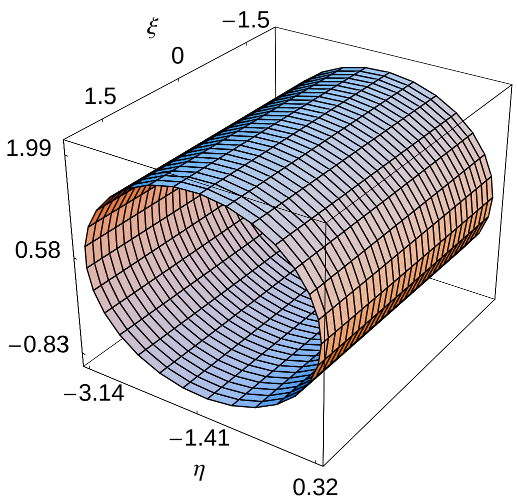
$$x=\frac{\xi}{\sqrt6}-\frac{\eta}{\sqrt2}+\frac{\zeta}{\sqrt3},\quad y=\frac{\xi}{\sqrt6}+\frac{\eta}{\sqrt2}+\frac{\zeta}{\sqrt3},\quad z=-\frac{2\xi}{\sqrt6}+\frac{\zeta}{\sqrt3} \tag{63}$$

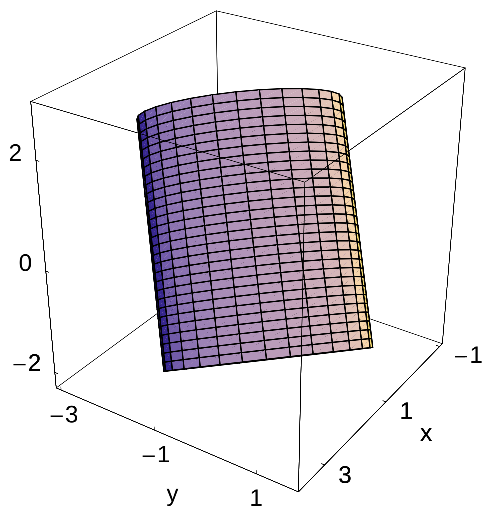
jsou transformační rovnice souřadnic. Dosazením (63) do (60) a jednoduchou úpravou získáme rovnici

$$2(\eta+\sqrt2)^2+3\Big(\zeta-\frac{1}{\sqrt3}\Big)^2=6, \tag{64}$$

což by v rovině $\eta\zeta$ byla rovnice elipsy o středu $(-\sqrt2, 1/\sqrt3)$ a délce poloos $\sqrt3$, $\sqrt2$. V prostoru jde ovšem o rovnici eliptického válce, jehož *osa* $\{(\xi,\eta,\zeta)\,;\,\xi\in\mathbb{R},\,\eta=-\sqrt2\,,\,\zeta=1/\sqrt3\}$ je rovnoběžná s první souřadnicovou osou ξ. Osa válce (60) má parametrický popis

$$(\Lambda^T)^{-1}\Big(t,-\sqrt2,\frac{1}{\sqrt3}\Big)=\Big(\frac43+\frac{t}{\sqrt6},\,-\frac23+\frac{t}{\sqrt6},\,\frac13-\sqrt{\frac23}\,t\Big),\ t\in\mathbb{R}.$$





Eliptický válec z příkladu 24: Vlevo válec (64), vpravo (60)

Příklad 25. Tento jednoduchý příklad má mj. objasnit postup při hledání vlastních vektorů v případě, že některý kořen charakteristické rovnice je dvojnásobný. Vyšetříme k tomu účelu množinu všech kořenů rovnice

$$x^2 - 2xy + 4xz + y^2 - 4yz + 4z^2 - 3x + y - 4z = 2\,. \tag{65}$$

Příslušná matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{66}$$

má charakteristickou rovnici $-\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$ s dvojnásobným kořenem 0 a jednoduchým kořenem 6. Je proto třeba najít dva ortogonální vlastní vektory příslušné ke kořenu 0 a jeden vlastní vektor příslušný ke kořenu 6. Vysvětlíme dva způsoby, jak to lze provést; obecně nelze říci, který z nich bude v té které situaci výhodnější.

A. Najdeme po jednom vektoru ke každému z vlastních čísel 0, 6 a doplníme tuto dvojici na ortogonální bázi: V našem případě bychom řešili rovnice $\Lambda u = 0$ a $(\Lambda - 6E)u = 0$. Z první z nich dostaneme po rozepsání na složky podmínku $u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$[5]), ze druhé podmínky $u_1 = \frac{1}{2}u_3$, $u_2 = -\frac{1}{2}u_3$; položíme proto např.

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\,, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\,. \tag{67'}$$

V tomto konkrétním případě je zřejmé, že stačí položit

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,, \tag{67''}$$

abychom získali kladnou ortonormální bázi; kdyby volba tohoto vektoru byla méně evidentní, mohli bychom vypočítat vektorový součin $(1,-1,-1) \times (1,-1,2) = (-3,-3,0)$, dělit třemi, abychom dostali jednodušší vektor $(-1,-1,0)$ téhož směru, a *změnit znaménko* tohoto vektoru, protože má být *druhým* členem kladné báze. Nakonec dělíme normou, čímž ovšem získáme opět vektor f_2.[6])

B. I když je v našem případě metoda popsaná sub A výhodnější, popišme ještě další možný postup, při němž k dvojnásobnému kořenu 0 charakteristické rovnice sestrojíme dva ortogonální vektory přímo (tj. bez užití vektoru f_3). Máme při tom dvě možnosti:

B1. Hledáme dvě nenulová řešení u', u'' rovnice $\Lambda u = 0$ s dodatečnou podmínkou $(u' \cdot u'') = 0$. Rozepsáno do složek to (v našem případě) znamená řešit tři rovnice

$$u_1' - u_2' + 2u_3' = 0\,, \quad u_1'' - u_2'' + 2u_3'' = 0\,, \quad u_1'u_1'' + u_2'u_2'' + u_3'u_3'' = 0$$

o šesti neznámých; abychom se zbavili poslední kvadratické rovnice a zároveň splnili první rovnici, položíme (podobně jako nahoře) $u_1' = 1$, $u_2' = -1$, $u_3' = -1$, takže nám zůstanou lineární rovnice

$$u_1'' - u_2'' + 2u_3'' = 0\,, \quad u_1'' - u_2'' - u_3''\,.$$

Z nich ihned plyne, že $u_3'' = 0$, $u_1'' = u_2''$. Položíme-li tedy $u_1'' = 1$, dostaneme vektory $(1,-1,-1)$ a $(1,1,0)$, což souhlasí s tím, co jsme vypočetli v bodě A.

B2. Najdeme dvě lineárně nezávislá řešení u', u'' rovnice $\Lambda u = 0$, a pokud nejsou ortogonální, ortogonalizujeme je metodou vyloženou v důkazu věty 5. Konkrétně může v našem případě postup vypadat např. takto: K vlastnímu číslu 0 zvolíme např. vektory $g_1 = (1,-1,-1)$ a $g_2 = (2,0,-1)$; vektor g_1 ponecháme beze změny, druhý vektor nahradíme vektorem $h = g_2 - \alpha g_1$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ zvolíme tak, aby bylo $(h \cdot g_1) = (g_2 \cdot g_1) - \alpha \|g_1\|^2 = 0$. Položíme proto $\alpha = (g_2 \cdot g_1)/\|g_1\|^2$; v našem případě je ovšem $(g_2 \cdot g_1) = 3$, $\|g_1\|^2 = 3$, takže vektor g_2 nahradíme vektorem $g_2 - g_1 = (1,1,0)$.

[5]) Všimněme si při příležitosti, že matice (66) má hodnost 1, takže dostáváme *jen jeden* vztah mezi u_1, u_2, u_3. Matice $\Lambda - 6E$ má však hodnost 2.

[6]) Jedním z hlavních cílů výuky matematiky (na všech úrovních) by mělo být zlepšování pozorovacích schopností studenta; specifické okolnosti aktuálního problému mohou často přispět k jeho rychlejšímu řešení – pokud si ovšem tyto specifické rysy uvědomíme. Kdo chce být považován za matematika, nechť nejdříve přemýšlí a pak teprve mechanicky počítá – pokud je to ještě vůbec nutné.

Ať již se rozhodneme pro kterýkoli postup, nezapomeneme dělit získané vektory jejich normami. □

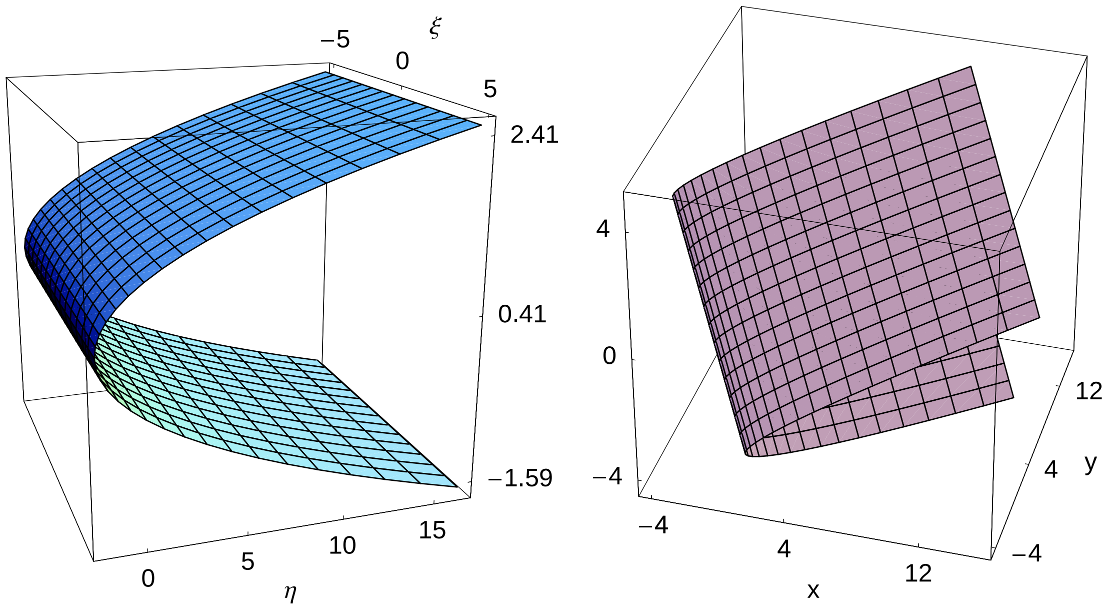
Po této odbočce, která může být pro čtenáře užitečná i v jiných situacích, dokončeme řešení příkladu 25. Nahoře nalezené bázi $\mathfrak{F}$ odpovídají transformační rovnice

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{6}}, \quad y = -\frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{6}}, \quad z = -\frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{2\zeta}{\sqrt{6}}; \tag{68}$$

dosazením do (65) a evidentní úpravou získáme rovnici

$$\sqrt{2}\Big(\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}\Big) = 6\Big(\zeta - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)^2 \tag{69}$$

charakterizující parabolický válec, jehož část je nakreslena na obrázku.



K PŘÍKLADU 25: VLEVO VÁLEC (69), VPRAVO (65)

5.5. Kužely

Kuželem se v širším smyslu rozumí část $\mathbb{R}^3$, která vznikne takto: 1) Zvolíme nějakou rovinu R a v ní nějakou množinu K; 2) zvolíme nějaký bod V mimo rovinu R; 3) každým bodem $X \in K$ vedeme přímku procházející bodem V; 4) kuželem o **základně** K a **vrcholu** V rozumíme sjednocení všech takto vzniklých přímek. (Poznamenejme, že místo o „kuželu“ se (ze zřejmých geometrických důvodů) mluví někdy i o „dvojkuželu“.) *V dalším budeme mluvit jen o kuželech v užším smyslu, kdy K je kuželosečka.* Protože vrchol V lze zvolit kdekoli mimo rovinu R, je zřejmé, že ke každé kuželosečce lze sestrojit nekonečně mnoho kuželů.

5.5a. Nejdříve vyšetříme případ, že zvolenou kuželosečkou je elipsa (speciálně: kružnice) v rovině R a navíc že vrchol V leží na kolmici k R procházející jejím středem; mluvíme pak o **eliptickém** (speciálně o **kruhovém** neboli **rotačním**) kuželu. Přímka procházející vrcholem kuželu a středem elipsy se nazývá **osou** kuželu.

Zvolíme-li za vrchol počátek $(0,0,0)$ a má-li elipsa ležící v rovině $z = c > 0$ parametrický popis $(a\cos\varphi, b\sin\varphi, c)$, kde a, b jsou kladná čísla a φ probíhá interval $\langle 0, 2\pi\rangle$, mají přímky procházející vrcholem a některým z bodů elipsy popis

$$(x,y,z) = t\cdot(a\cos\varphi, b\sin\varphi, c), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \tag{70}$$

Z toho ihned plyne, že

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2. \tag{71}$$

Průnik roviny $z = 0$ s tímto kuželem je jednobodová množina obsahující počátek; průnik roviny $z = z_0 \neq 0$ je elipsa o středu $(0,0,z_0)$, jejíž poloosy mají délky $a\,|z_0|\,/c$ a $b\,|z_0|\,/c$ tím větší, čím dále je rovina $z = z_0$ od roviny $z = 0$.

Průnik kuželu (70) s rovinou $x = 0$ je dvojice přímek s popisem $z = \pm cy/b$, roviny $x = x_0 \neq 0$ protínají kužel v hyperbolách s popisem

$$\frac{z^2}{a^{-2}c^2x_0^2} - \frac{y^2}{a^{-2}b^2x_0^2} = 1\,.$$

Podobně je to s průniky kuželu s rovinami $y = y_0$.

Posunutím počátku získáme obecnější rovnici

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = \left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2 \tag{70'}$$

eliptického kuželu s vrcholem v bodě (x_0, y_0, z_0). Osa tohoto kuželu spolu i osy elips (průniků kuželu s rovinami $z = d \neq z_0$) jsou (podobně jako v případě (70)) rovnoběžné s osami souřadnicové soustavy; v této poloze jsou kužely popsány nejjednoduššími rovnicemi. Příklad 26 ilustruje, jak může vypadat popis eliptického kuželu v obecnější poloze.

Příklad 26. Vyšetřme množinu všech bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících rovnici

$$x^2 + 2xy + 8xz - 2y^2 - 2yz + z^2 - 2x + 2y + 12z = 7. \tag{72}$$

Příslušná matice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{73}$$

má charakteristickou rovnici $-\lambda^3 + 21\lambda + 20 = 0$ s kořeny $-4, -1, 5$, příslušné vlastní vektory

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1), \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1), \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \tag{74}$$

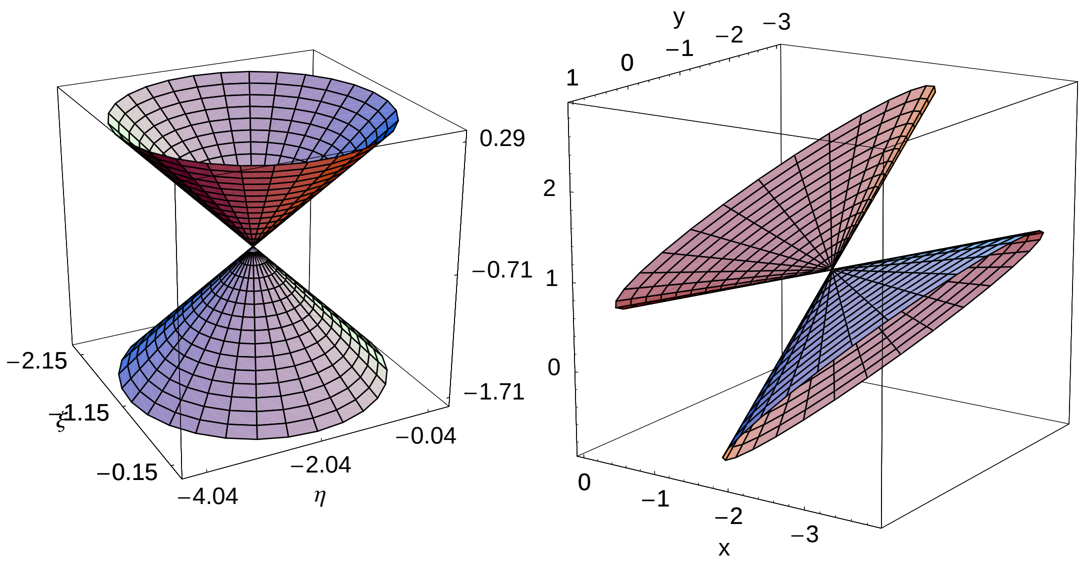
tvoří kladnou ortonormální bázi. Souřadnice se transformují podle rovnic

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{2\eta}{\sqrt{6}}, \quad z = -\frac{\xi}{\sqrt{3}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \tag{75}$$

a dosazením těchto vztahů do (72) dostaneme (po snadné úpravě) rovnici

$$(76)\qquad 4\Big(\xi+\frac{2}{\sqrt3}\Big)^2+\Big(\eta+\frac{5}{\sqrt6}\Big)^2=5\Big(\zeta+\frac{1}{\sqrt2}\Big)^2$$

popisující eliptický kužel s vrcholem $-(2/\sqrt3, 5/\sqrt6, 1/\sqrt2) \doteq -(1.15, 2.04, 0.71)$ a s osou rovnoběžnou s osou ζ. Vrcholem původního kuželu (72) je bod $(-2,-1,1)$.



K PŘÍKLADU 26: VLEVO KUŽEL (76), VPRAVO (72)

5.5b. Dvojice rovin (různoběžných nebo rovnoběžných, různých nebo totožných) jsme zařadili mezi válce, ale někdy jde zároveň o kužely: Kužel vzniklý z přímky (jako základny) a vrcholu (který na ní neleží) je rovina; kužel vzniklý z dvojice navzájem různých přímek a vrcholu (který neleží v rovině, která přímky obsahuje) je dvojice různoběžných rovin; kužel vzniklý z jednobodové množiny $\{A\}$ a vrcholu $V \neq A$, je přímka; kužel vzniklý z prázdné množiny a jakéhokoli vrcholu je samozřejmě prázdná množina. Rovnoběžné, navzájem různé roviny mezi kužele nepatří.

Roviny, dvojice různoběžných rovin, přímky a prázdnou množinu můžeme nazvat **degenerovanými kužely**.

Příklad 27. Vyšetříme rovnici

$$(77)\qquad 9x^2+12xy-6xz+4y^2-4yz+z^2+30x+20y-10z+25=0;$$

pokud máme výjimečně dobře rozvinutou pozorovací schopnost (nebo pokud nám někdo napoví), rozeznáme v levé straně čtverec výrazu $3x+2y-z+5$, a příklad je tím rozřešen – jde o (komplikovaně napsanou) rovnici roviny s popisem $z=3x+2y+5$ upravenou tak, abychom rovinu mohli považovat za kvadriku – mluví se v tom případě o **dvojnásobné rovině**.

Předpokládejme však raději, že naše pozorovací schopnost není tak vynikající, a postupujme standardním způsobem: O značné „degeneraci“ kvadriky (77) svědčí fakt, že matice

$$(78)\qquad \Lambda=\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3\\ 6 & 4 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

má jen hodnost 1; charakteristická rovnice $-\lambda^3+14\lambda^2=0$ má dvojnásobný kořen 0 a jednoduchý kořen 14. Kořen 0 vede k rovnici $\Lambda u=0$, tj. k rovnici $-3u_1-2u_2+u_3=0$, jejíž jedno řešení je např. $(1,0,3)$; kořen 14 vede obdobně k rovnicím $u_1+3u_3=0$, $u_2+2u_3=0$, kterým vyhovuje např. vektor $(3,2,-1)$. Protože vektorový součin nalezených dvou vektorů je $(-6,10,2)$, lze za další vektor zvolit např. $(3,-5,-1)$ – pro zjednodušení jsme dělili dvěma a u vzniklého vektoru jsme *změnili znaménko*, protože jej chceme zařadit na *druhé* místo v bázi. [7])

[7]) Je dobré mít stále na paměti, že vektorový součin $w=u\times v$ dvou lineárně nezávislých vektorů u, v má tu vlastnost, že báze $\{u,v,w\}$ je kladná, zatímco báze $\{u,w,v\}$ by byla záporná.

Kladnou ortonormální bázi dostaneme dělením nalezených vektorů příslušnými normami: bude tedy

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(1,0,3)\,, \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}\,(3,-5,-1)\,, \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(3,2,-1)\,. \tag{79}$$

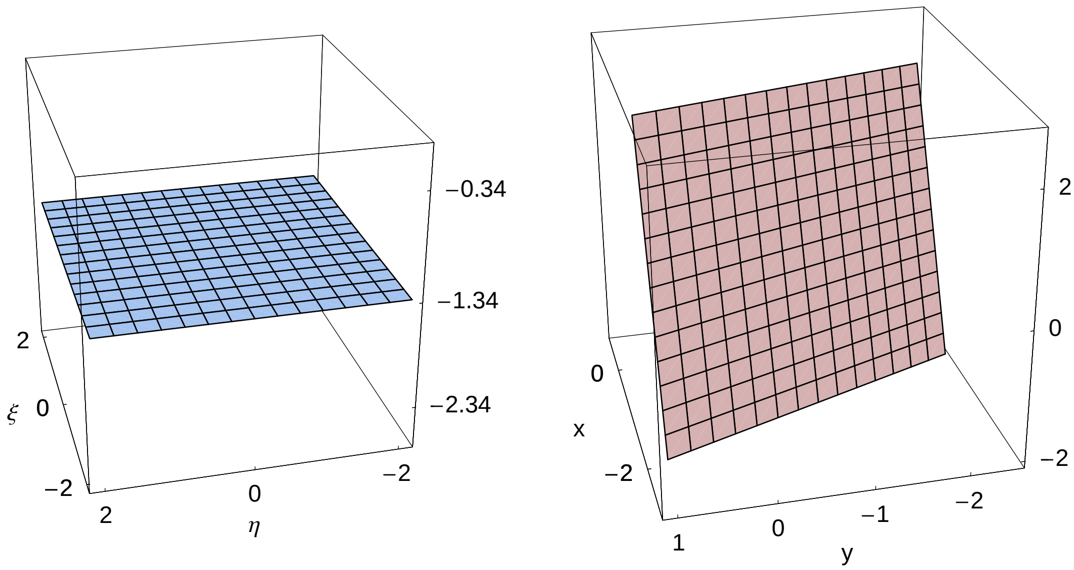
Tomu odpovídá transformace souřadnic

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{10}} + \frac{3\eta}{\sqrt{35}} + \frac{3\zeta}{\sqrt{14}}\,, \quad y = -\frac{5\eta}{\sqrt{35}} + \frac{2\zeta}{\sqrt{14}}\,, \quad z = \frac{3\xi}{\sqrt{10}} - \frac{\eta}{\sqrt{35}} - \frac{\zeta}{\sqrt{14}}\,, \tag{80}$$

po níž ze (77) získáme rovnici

$$(\sqrt{14}\,\zeta + 5)^2 = 0 \ \text{ neboli } \ \zeta = -\frac{5}{\sqrt{14}} \doteq -1.34 \tag{81}$$

roviny kolmé k ose ζ.



K PŘÍKLADU 27: VLEVO ROVINA (81), VPRAVO ROVINA $z = 3x + 2y + 5$

5.5c. Tím náš neúplný přehled kvadrik končí; pozorný čtenář se však může zeptat, proč jsme nevyšetřili parabolické a hyperbolické kužely. Odpověď se pokusíme v dalším najít za předpokladu, že vrchol kuželu leží na přímce, která je kolmá k rovině paraboly resp. hyperboly a která prochází vrcholem paraboly resp. středem hyperboly.

Transformací prostoru pomocí vhodné lineární funkce proměnných x, y, z [8]) můžeme dosáhnout toho, že vrcholem V je počátek a že parabola $y = x^2$ resp. hyperbola $y^2 - x^2 = 1$ leží v rovině $z = 1$.

Parametrický popis takové paraboly je $f(s) := (s, s^2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, a přímky, z nichž se skládá příslušný kužel, mají popis

$$V + t\,f(s) = (ts, ts^2, t)\,, \ \text{ kde } \ s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}. \tag{82}$$

Z identity $(x, y, z) = (ts, ts^2, t)$ ihned plyne, že

$$x^2 - yz = 0\,. \tag{83}$$

Abychom ukázali, že tato rovnice popisuje eliptický kužel, položme

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{84}$$

[8]) Taková transformace nemění nic, co je v dalších úvahách podstatné.

a buď

$$(x,y,z) = \Lambda^T(u,v,w)\,, \ \text{ tj. } \ x = u\,,\ y = \frac{v-w}{\sqrt{2}}\,,\ z = \frac{v+w}{\sqrt{2}}\,; \tag{85}$$

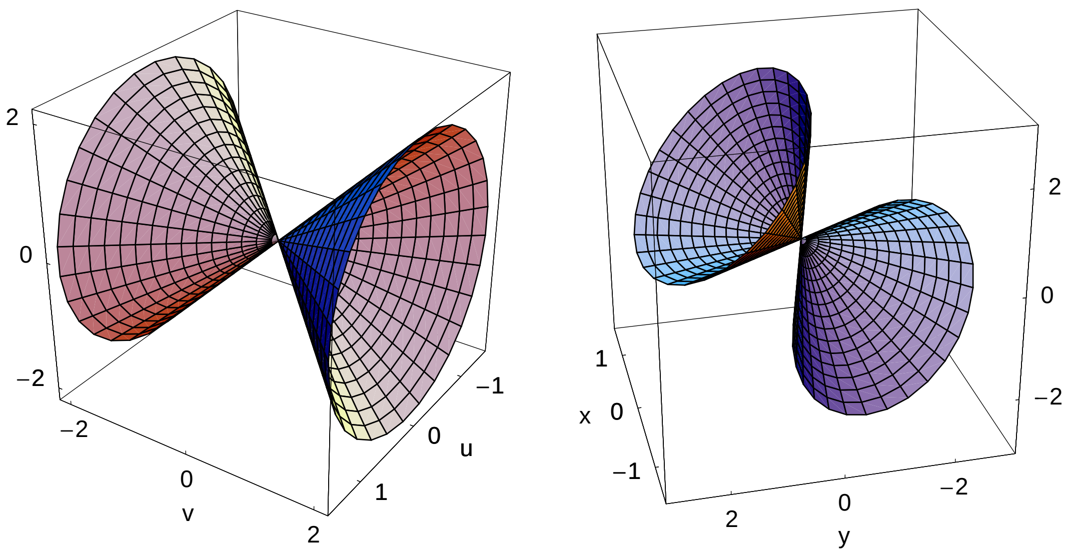
tato transformace znamená otočení kolem osy x o 45°. Rovnice (83) přejde v rovnici $u^2 - \frac{1}{2}(v^2 - w^2) = 0$, neboli v rovnici

$$2u^2 + w^2 = v^2\,, \tag{86}$$

která popisuje eliptický kužel s osou v. Rovnicí kuželu je proto i (83).

Dokázali jsme, že každý bod (x,y,z) tvaru (82) splňuje rovnici (83). Obráceně: splňuje-li nějaký bod (x,y,z) rovnici (83), je buď $y \ge 0$, $z \ge 0$, nebo $y \le 0$, $z \le 0$. Každý bod tvaru $(x,y,0)$ lze napsat ve tvaru (82) s $t = 0$; je-li $z \ne 0$, položme $t = z, s = x/z$ a uvažme, že pak $y = x^2/z = ts^2$. Tím je dokázáno, že ke každému bodu (x,y,z) splňujícímu rovnici (82) existují čísla s,t tak, že se $(x,y,z) = (ts, ts^2, t)$.

Jinými slovy, *parabolický kužel s popisem* (82) *je identický s eliptickým kuželem* (83). *Parabolické kužely nejsou zvláštním, novým typem kuželů.*



K ODDÍLU 5.5C: VLEVO KUŽEL (86), VPRAVO KUŽEL (83)

Hyperbola $y^2 - x^2 = 1$ v rovině $z = 1$ je popsána funkcemi

$$f_1(s) := (s, \sqrt{1+s^2}, 1) \ \text{ a } \ f_2(s) := (s, -\sqrt{1+s^2}, 1)\,,\ \ s \in \mathbb{R}\,, \tag{87}$$

z nichž každá popisuje jednu větev hyperboly. Body příslušného (hyperbolického) kuželu jsou právě všechny body tvaru

$$V \pm t f_j(s) = (ts, \pm t\sqrt{1+s^2}, t)\,,\ \ s \in \mathbb{R}\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,. \tag{88}$$

Je-li $(x,y,z) = (ts, \pm t\sqrt{1+s^2}, t)$, je

$$x^2 + z^2 = y^2\,, \tag{89}$$

což je rovnice kruhového kuželu s osou y. Dokázali jsme, že *hyperbolický kužel* (88) *je obsažen v kruhovém kuželu* (89).

Obráceně, nechť bod (x,y,z) splňuje rovnici (89), tj. nechť $y = \pm\sqrt{x^2+z^2}$. Je-li $z \ne 0$, bude mít bod (x,y,z) tvar (88), položíme-li $t = z$, $s = x/z$. *Je-li však* $z = 0$ *a není-li* $(x,y,z) = (0,0,0)$, *bod* (x,y,z) *ve tvaru* (88) *napsat nelze.* Hyperbolický kužel totiž kromě svého vrcholu $V = (0,0,0)$ neobsahuje žádný bod roviny $z = 0$. Přímky $y = \pm x$, $z = 0$ [9]) naopak leží v kruhovém kuželu (89), a teprve když je přidáme ke kuželu (88), dostaneme kužel (89).

[9]) Jen pro zajímavost: Jsou to asymptoty hyperboly $y^2 - x^2 = 1$ v rovině $z = 0$.

Autorovi není známo, co je příčinou, že se o parabolických a hyperbolických kuželech v běžné literatuře o kvadrikách diskrétně mlčí. V prvním případě je to snad proto, že jsou zbytečné, ve druhém případě to může být např. nemožnost popsat *celý* hyperbolický kužel kvadratickou funkcí proměnných x, y, z. Pár slov na vysvětlenou by určitě neškodilo.

5.6. Úplná klasifikace kvadratických forem

Předpokládejme, že kvadratická rovnice $F(x,y,z) = 0$ byla (pomocí vlastních čísel a vektorů) převedena na tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + ax + by + cz + d = 0\,, \tag{90}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou vlastní čísla matice Λ (srov. s (3) a (4)), a, b, c, d reálná čísla. Typ kvadriky (elipsoid, hyperboloid, paraboloid, atd.) závisí (mj.) na tom, kolik vlastních čísel je kladných, záporných a nulových; nezávisí na pořadí proměnných x, y, z, a jejich případné permutace přenecháme proto čtenáři. V závislosti na $\operatorname{sgn} \lambda_k, k = 1, 2, 3$, existuje (až na permutace) jen těchto pět možností:

5.6a. *Všechna vlastní čísla λ_k jsou kladná.* [10])

Převeďme (90) na tvar

$$\lambda_1 (x-\alpha)^2 + \lambda_2 (y-\beta)^2 + \lambda_3 (z-\gamma)^2 = k \tag{91}$$

a uvažme, že podle toho, zdali je $k > 0$ nebo $k = 0$ nebo $k < 0$, popisuje (91) *elipsoid* nebo *jednobodovou množinu* nebo *prázdnou množinu*.

5.6b. *Dvě vlastní čísla, např. λ_1, λ_2 jsou kladná, třetí, λ_3, je záporné.* [11]) Převeďme (90) opět na tvar (91) a uvažme, že podle toho, zdali je $k > 0$ nebo $k = 0$ nebo $k < 0$, popisuje (91) *jednodílný hyperboloid* nebo *eliptický kužel* [12]) nebo *dvojdílný hyperboloid*.

5.6c. *Dvě vlastní čísla, např. λ_1, λ_2 jsou kladná, třetí, λ_3, je rovné nule.* Pak (90) upravíme na tvar

$$\lambda_1 (x-\alpha)^2 + \lambda_2 (y-\beta)^2 = k_1 z + k_2 \tag{92}$$

a uvážíme, že jsou tyto možnosti: 1) $k_1 = 0$; podle toho, zdali je $k_2 > 0$ nebo $k_2 = 0$ nebo $k_2 < 0$, popisuje (92) *eliptický válec* nebo *přímku* nebo *prázdnou množinu*. 2) $k_1 \neq 0$; pak (92) popisuje *eliptický paraboloid* (který je při $\lambda_1 = \lambda_2$ rotační).

5.6d. *Je-li např. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 = 0$,* přepišme (90) opět na tvar (92) a vyšetřme dvě situace: 1) $k_1 = 0$; podle toho, zdali je $k_2 = 0$ nebo $k_2 \neq 0$, popisuje rovnice *dvojici různoběžných rovin* nebo *hyperbolický válec*. 2) Je-li $k_1 \neq 0$, jde o *hyperbolický paraboloid*.

5.6e. *Nechť např. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.* [13]) Pak lze (90) napsat ve tvaru

$$\lambda_1 (x-\alpha)^2 = k_1 y + k_2 z + k_3\,. \tag{93}$$

Je buď $k_1^2 + k_2^2 > 0$, nebo $k_1 = k_2 = 0$. V prvním případě popisuje (93) *parabolický válec*, ve druhém je buď $k_3 > 0$ nebo $k_3 = 0$ nebo $k_3 < 0$ a podle toho je (93) rovnicí *dvou rovnoběžných, navzájem různých rovin* nebo *roviny* nebo *prázdné množiny*.

Poznámka 20. Je zřejmé, že rovnice $(x-a)^2 = k_1 y + k_3$, kde $k_1 \neq 0$, a $(x-a)^2 = k_2 z + k_3$, kde $k_2 \neq 0$, popisují parabolické válce. Případ $k_1 \neq 0 \neq k_2$ lze však vhodným otočením kolem osy x převést na některý z právě uvedených dvou případů. [14])

---

[10]) Případ, že jsou všechna záporná, je analogický; v (91) stačí změnit znaménka obou stran rovnice.

[11]) Případ $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$ je analogický; stačí změnit znaménka obou stran rovnice.

[12]) Jistě není třeba dodávat, že tento kužel je rotační, je-li $\lambda_1 = \lambda_2$.

[13]) Případ $\lambda_1 < 0$ je analogický.

[14]) Lze tak postupovat např. ve cvičení 30.

Cvičení

V každém ze cvičení 1 – 50, která následují, je dána kvadratická rovnice

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23} + a_{33}z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \tag{94}$$

ve třech proměnných x, y, z – souřadnicích bodů z $\mathbb{R}^3$ při bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$; úkolem je najít kladnou ortonormální bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$ tak, že v souřadnicích ξ, η, ζ při této bázi bude mít kvadratická část

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23} + a_{33}z^2 \tag{95}$$

levé strany rovnice (90) diagonální tvar

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2, \tag{96}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou vlastní čísla (symetrické) matice

$$\Lambda := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{97}$$

Po dosazení do (94) podle transformační rovnice $(x, y, z) = M^T(\xi, \eta, \zeta)$, kde M je matice o řádcích $f_j = (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3})$, $j = 1, 2, 3$, neboli podle rovnic

$$x = f_{11}\xi + f_{12}\eta + f_{13}\zeta, \quad y = f_{12}\xi + f_{22}\eta + f_{23}\zeta, \quad z = f_{13}\xi + f_{23}\eta + f_{33}\zeta, \tag{98}$$

je třeba rovnici upravit na tvar, z něhož lze poznat, o jakou kvadriku se jedná.

Během vyšetřování kvadrik jsme poznamenali, že sice není nutné dosazovat do (95), protože teorie zaručuje, že (95) přejde automaticky na diagonální tvar (96), ale že dosazení může odhalit případnou chybu ve výpočtech. Pokud si však je řešitel jist svým správným postupem, stačí, aby dosadil do lineární části a pak výraz upravil na tvar, z něhož je patrné, o kterou kvadriku se jedná. (Jsou-li např. všechna vlastní čísla nenulová, má takový tvar rovnice

$$\lambda_1(\xi - a)^2 + \lambda_2(\eta - b)^2 + \lambda_3(\zeta - c)^2 = d, \tag{99}$$

protože pak lze podle $\operatorname{sgn} d$ definitivně rozhodnout, zdali jde o elipsoid, jednobodovou nebo prázdnou množinu.)

Na několika místech obecného postupu lze pokračovat několika různými způsoby, což by mohlo ztížit nebo dokonce zabránit porovnání čtenářových výsledků s výsledky autorovými; proto se v zadání příkladů uvádějí první dva vlastní vektory užité v autorském řešení. K nalezení třetího vektoru není sice třeba znát vlastní čísla, protože tento vektor je k prvním dvěma vektorům kolmý, ale řešitel pak nebude moci (bez dosazování) napsat (96). Nalezení vlastních čísel proto autor vřele doporučuje. Není patrně nutné zdůrazňovat, že před napsáním transformačních rovnic (98) je třeba vlastní vektory normovat.

Znění úloh lze ještě doplnit např. o nalezení středu původní kvadriky (94) (pokud střed má), o nalezení např. osy válce a v případě eliptického paraboloidu i jeho vrcholu, atd.

01. $2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2 - 2x - 12y + 2z + 13 = 0$
$f_1 = (1, 0, -1), f_2 = (0, 1, 0)$

02. $4x^2 + 8xy + 8xz + 4y^2 + 8yz + 4z^2 + 9x + 8y + 7z + 5 = 0$
$f_1 = (-1, 0, 1), f_2 = (1, -2, 1)$

03. $2x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - x - y + 5z + 1 = 0$
$f_1 = (1, -1, -2), f_2 = (1, 1, 0)$

04. $2x^2 - 2xz + y^2 - 4yz = 1$
$f_1 = (\sqrt{3} - 1, 2, \sqrt{3} + 1), f_2 = (\sqrt{3} + 1, -2, \sqrt{3} - 1)$

05. $2xy + 2xz + 2yz = 1$
$f_1 = (0, -1, 1), f_2 = (2, -1, -1)$

06. $x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 + 4y - 2z = 1$
$f_1 = (0, 2, -1), f_2 = (0, 1, 2)$

07. $x^2 - 4xy + 4yz - z^2 + 5x - 8y - z + 9 = 0$
$f_1 = (1, 2, -2), f_2 = (2, 1, 2)$

08. $x^2 - 4xy + 8y^2 - 4yz + z^2 + 5x - 16y + 3z + 7 = 0$
$f_1 = (2,1,2), f_2 = (-1,0,1)$

09. $x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 4yz + 2z^2 - 4x + 4z = 3$
$f_1 = (1,1,0), f_2 = (1,-1,-2)$

10. $2x^2 + 3y^2 - 6yz + 3z^2 - 8y + 8z + 5 = 0$
$f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,0,0)$

11. $3x^2 + 8xy - 6xz + 9y^2 - 12yz + 7z^2 - 26x - 32y + 10z + 75 = 0$
$f_1 = (2,-1,0), f_2 = (1,2,3)$

12. $3x^2 + 4xy - 6xz + 6y^2 - 12yz + 11z^2 - 8y - 16z + 28 = 0$
$f_1 = (2,-1,0), f_2 = (3,6,5)$

13. $4x^2 + 8xy - 4xz + 4y^2 - 4yz + z^2 - 16x - 16y + 8z = 9$
$f_1 = (1,-1,0), f_2 = (1,1,4)$

14. $6xy + 6xz + y^2 + 4yz + z^2 + 12x + 8y + 16z + 10 = 0$
$f_1 = (2,-1,-1), f_2 = (0,1,-1)$

15. $3x^2 + 4xz + 3y^2 + 6x - 6y + 4 = 0$
$f_1 = (1,0,-2), f_2 = (0,1,0)$

16. $-4xy - 4xz + y^2 + 2yz + z^2 + 10x - 6y - 6z + 9 = 0$
$f_1 = (2,1,1), f_2 = (0,-1,1)$

17. $x^2 + 4xy - 4xz + 2yz + 2x + 2y + 6z + 7 = 0$
$f_1 = (1,-1,1), f_2 = (0,1,1)$

18. $x^2 - 2xy - 4xz + y^2 - 4yz + 8y - 8z + 10 = 0$
$f_1 = (1,1,\sqrt{2}), f_2 = (1,-1,0)$

19. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2 + 3x + 10y - 11z = 25$
$f_1 = (0,1,-1), f_2 = (0,1,1)$

20. $6x^2 + 8xy + 6xz + 6y^2 + 6yz + 3z^2 - 12y + 6z + 29 = 0$
$f_1 = (1,1,-3), f_2 = (-1,1,0)$

21. $x^2 - 2xz + y^2 - 2yz + 2z^2 + \sqrt{2}(x + y + z) = 0$
$f_1 = (1,1,-2), f_2 = (-1,1,0)$

22. $-4xy + 4xz - y^2 + z^2 + 6x - 6y + 3z = 0$
$f_1 = (2,2,-1), f_2 = (2,-1,2)$

23. $8xy + 16xz - 16yz + 4z^2 + 36x + 20y - 20z + 87 = 0$
$f_1 = (-1,1,1), f_2 = (1,-1,2)$

24. $x^2 - xy + xz + y^2 + yz + z^2 + 3x - 3y = 0$
$f_1 = (1,1,2), f_2 = (-1,1,0)$

25. $-xy + xz - yz + 3x - 3y = 0$
$f_1 = (1,-1,1), f_2 = (-1,0,1)$

26. $6x^2 - 24xy + 6y^2 + 12z^2 - 12x - 24y + 36z + 7 = 0$
$f_1 = (-1,1,0), f_2 = (0,0,1)$

27. $x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2 + 3\sqrt{2}(x - y) - 2z + 5 = 0$
$f_1 = (0,0,1), f_2 = (1,-1,0)$

28. $2x^2 - 8xy - 4y^2 + 2z^2 - 12x - 12y - 4z = 7$
$f_1 = (1,2,0), f_2 = (-2,1,0)$

29. $8x^2 + 8xz + 8y^2 + 8yz + 12z^2 + 16x + 8y + 4z = 1$
$f_1 = (1,1,2), f_2 = (-1,1,0)$

30. $20(x^2 + 2\sqrt{2}(xy + xz) + 2y^2 + 4yz + 2z^2 + \sqrt{5}x) + 1 = 0$
$f_1 = (1,\sqrt{2},\sqrt{2}), f_2 = (\sqrt{2},0,-1)$

31. $x^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 1$
$f_1 = (1, 0, -1), f_2 = (0, 1, 0)$

32. $x^2 + xy - xz - yz = 0$
$f_1 = (2, 1, 0), f_2 = (0, 1, 1)$

33. $4x^2 + 8xy + 4xz + 4y^2 + 4yz + z^2 = 0$
$f_1 = (2, 2, 1), f_2 = (-1, 0, 2)$

34. $20xy + 40xz - 40yz - 30z^2 + 10x - 10y - 20z = 3$
$f_1 = (-1, 1, 2), f_2 = (2, 0, 1)$

35. $x^2 - 2xy + 2xz + y^2 - 2yz + z^2 = 9$
$f_1 = (1, -1, 1), f_2 = (1, 0, -1)$

36. $5x^2 - 10xy + 10xz + 25y^2 + 50yz + 25z^2 + 60x + 20y = 64$
$f_1 = (0, 1, 1), f_2 = (2, -1, 1)$

37. $2xy + 4xz - 4yz - 3z^2 - 5x = 10$
$f_1 = (-1, 1, 2), f_2 = (2, 0, 1)$

38. $24x^2 - 16xy - 16xz + 24y^2 - 16yz + 24z^2 - 40x = 23$
$f_1 = (1, 1, -2), f_2 = (-1, 1, 0)$

39. $x^2 - 2xz - 3y^2 + z^2 - \sqrt{2}x - 6y - \sqrt{2}z = 3$
$f_1 = (0, 1, 0), f_2 = (-1, 0, 1)$

40. $x^2 + 12xz + z^2 + x - z = 0$
$f_1 = (1, 0, 1), f_2 = (1, 0, -1)$

41. $x^2 - 2xy + 2xz + y^2 - 2yz + z^2 + x + y + z = 0$
$f_1 = (1, -1, 1), f_2 = (-1, 0, 1)$

42. $16(x^2 - xy + xz + y^2 - yz + z^2) - 8\sqrt{6}(x + y + z) + 1 = 0$
$f_1 = (1, -1, 1), f_2 = (1, 0, -1)$

43. $2(x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4yz - x + 2y - z) = 3$
$f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (-1, 0, 1)$

44. $2xy + y^2 + 2yz - x - y - z = 0$
$f_1 = (1, 2, 1), f_2 = (1, -1, 1)$

45. $4(x^2 - 2xy - 2xz - y^2 - 2yz + z^2 + x + y + z) = 5$
$f_1 = (1, 2, 1), f_2 = (-1, 0, 1)$

46. $16(x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + 3z^3 + \sqrt{2}(x + 2y)) = 5$
$f_1 = (1, 1, -2), f_2 = (1, 1, 1)$

47. $16(4x^2 - 4xy + 4xz + y^2 - 2yz + z^2 + 6x + 3z) + 1 = 0$
$f_1 = (2, -1, 1), f_2 = (1, 0, -2)$

48. $4(x^2 - 4xy - 4xz + y^2 - 4yz + z^2 - 12x - 6y - 9z) = 3$
$f_1 = (1, 1, -2), f_2 = (-1, 1, 0)$

49. $20(x^2 - xy + xz + y^2 - yz + 2z^2 + \sqrt{3}(x + y + z)) = 1$
$f_1 = (1, -1, 2), f_2 = (1, -1, -1)$

50. $3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy - xz + yz) + 4(x + 2y + z) + 13 = 0$
$f_1 = (1, -1, 1), f_2 = (1, 0, -1)$

Následující stránky obsahují řešení právě uvedených cvičení. Danou kvadratickou funkci značíme $F(x, y, z)$. Po uvedení vlastních čísel a vektoru f_3 následuje rovnice R získaná dosazením $(x, y, z) = M^T(\xi, \eta, \zeta)$ do rovnice $F(x, y, z) = 0$ a informace o typu právě vyšetřované kvadriky; tyto informace jsou někdy ještě doplněny dalšími podrobnostmi. Následují dva obrázky; vlevo je graf (nebo jeho vhodná část, jedná-li se o neomezenou kvadriku) kvadriky popsané rovnicí R (v souřadnicové soustavě ξ, η, ζ), vpravo graf původní kvadriky $F(x, y, z) = 0$.

Z technických důvodů nebylo vždy možné kreslit grafy „v měřítku“, což zkresluje úhly a skutečný tvar kvadrik; z numerických údajů na obrázcích však lze aspoň přibližně vyčíst, jaké jsou jednotky délky na jednotlivých osách.

Řešení

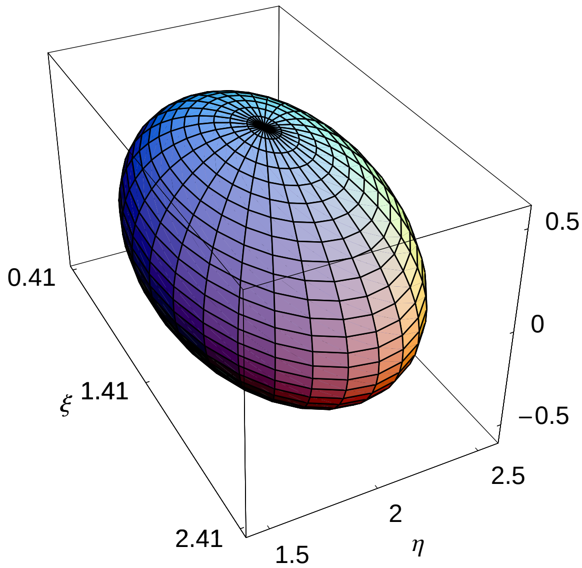
Cvičení 01. $F(x,y,z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2 - 2x - 12y + 2z + 13.$

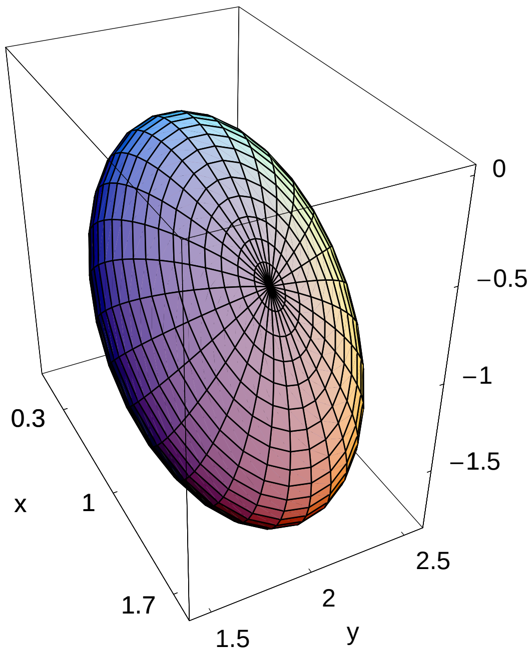
Vlastní čísla: $0, 3, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 0, 1)$.

$$R: \ (\xi - \sqrt{2})^2 + 3(\eta - 2)^2 + 3\zeta^2 = 1,$$

rotační elipsoid o středu $(\sqrt{2}, 2, 0) \doteq (1.4, 2, 0)$.

Středem elipsoidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $(1, 2, -1)$.



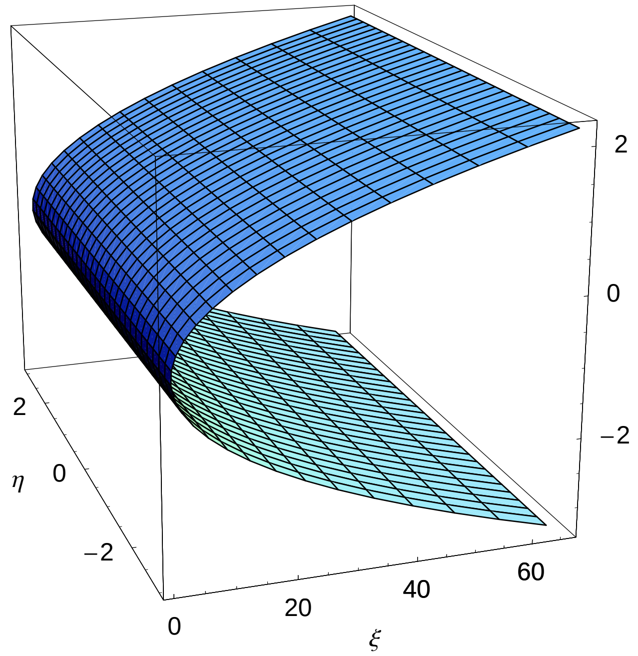


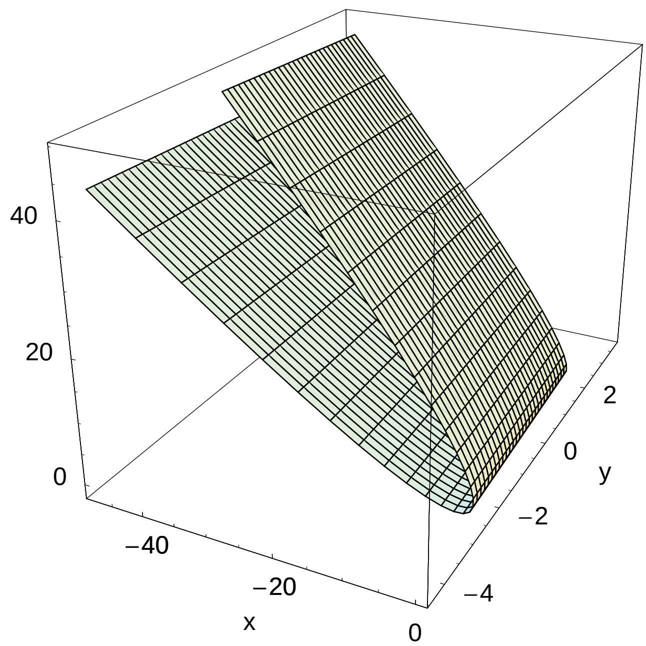
Cvičení 02. $F(x,y,z) = 4x^2 + 8xy + 8xz + 4y^2 + 8yz + 4z^2 + 9x + 8y + 7z + 5.$

Vlastní čísla: $0, 0, 12$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,1)$.

$$R:\ \sqrt{2}\Big(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 12\Big(\zeta + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$

parabolický válec.





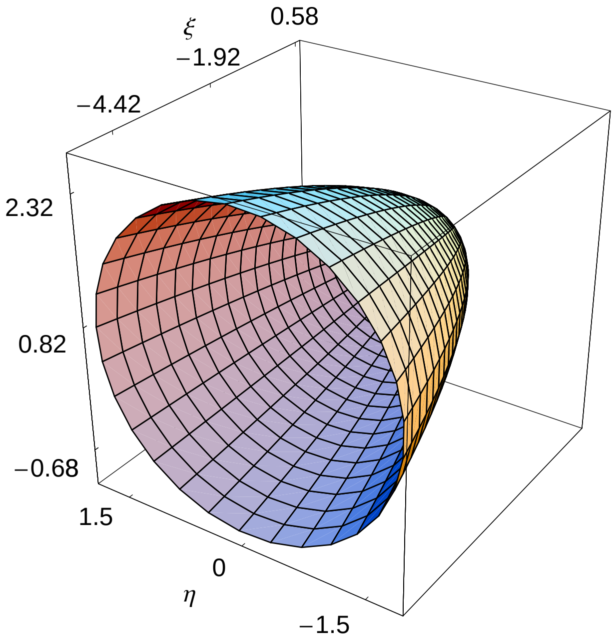
Cvičení 03. $F(x,y,z) = 2x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - x - y + 5z + 1.$

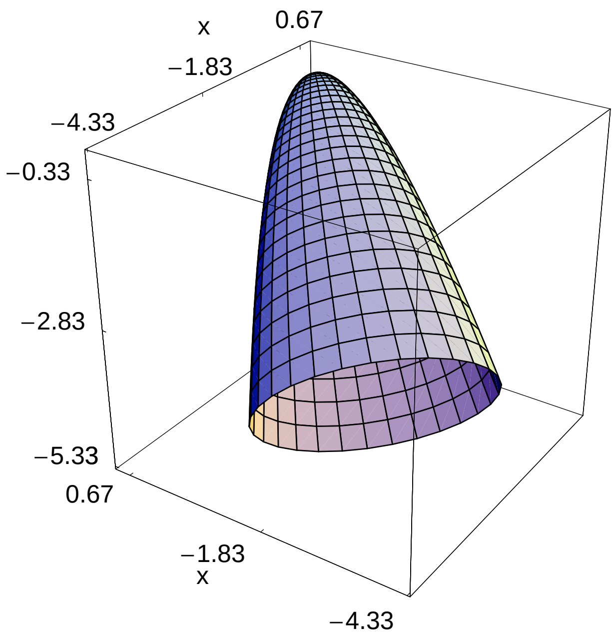
Vlastní čísla: $0, 3, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -1, 1)$.

$$R: \ \sqrt{3}\Big(\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = 3\eta^2 + 3\Big(\zeta - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\Big),$$

rotační paraboloid s vrcholem $(1/\sqrt{3}, 0, \sqrt{2/3} \doteq (0.58.0.0.82)$.

Vrcholem paraboloidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.





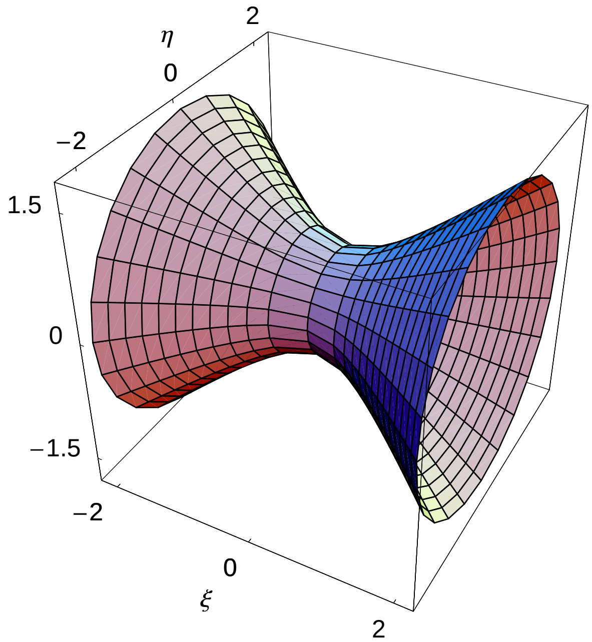
Cvičení 04. $F(x, y, z) = 2x^2 - 2xz + y^2 - 4yz - 1$.

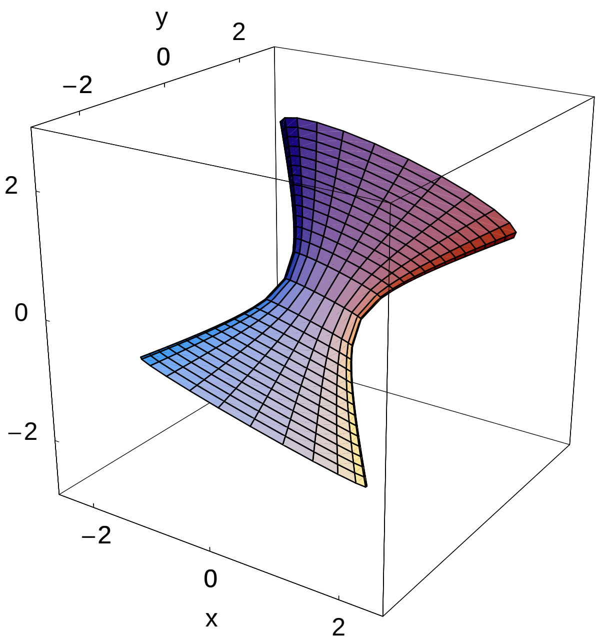
Vlastní čísla: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, -1)$.

$$R: \; -\sqrt{3}\xi^2 + \sqrt{3}\eta^2 + 3\zeta^2 = 1\,,$$

jednodílný hyperboloid se středem v počátku.

Středem hyperboloidu $F(x, y, z) = 0$ je bod $(0, 0, 0)$.





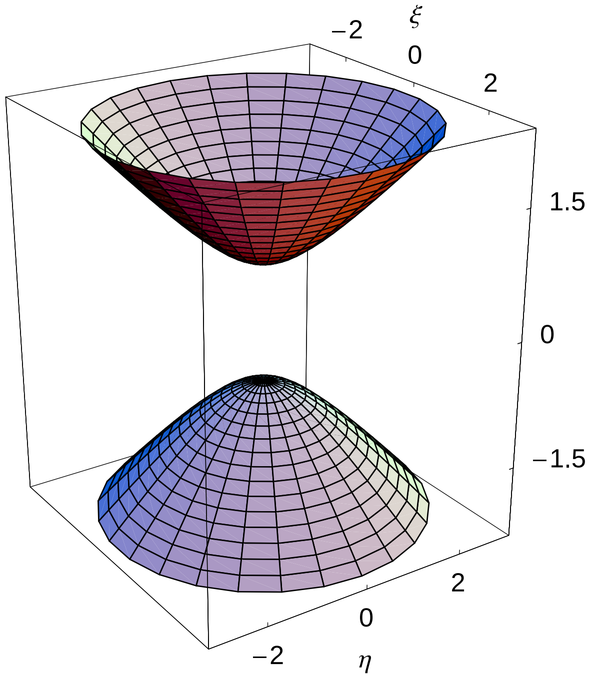
Cvičení 05. $F(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz - 1$.

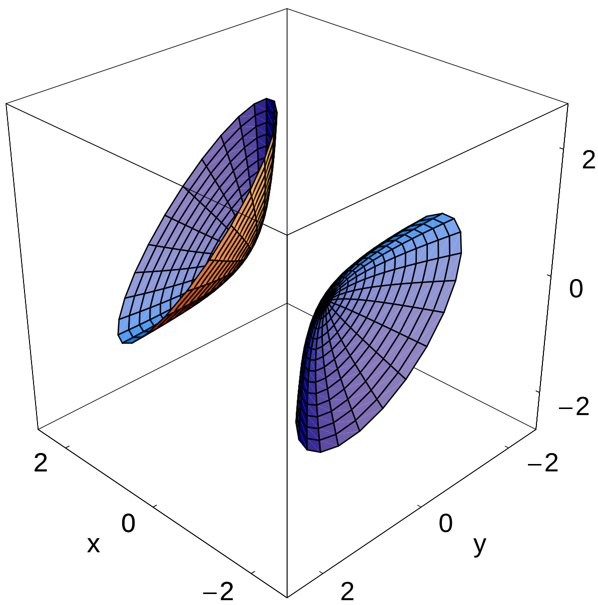
Vlastní čísla: $-1, -1, 2$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, 1)$.

$$R: \ -\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2 = 1,$$

rotační dvojdílný hyperboloid o středu v počátku.

Středem hyperboloidu $F(x, y, z) = 0$ je bod $(0, 0, 0)$.





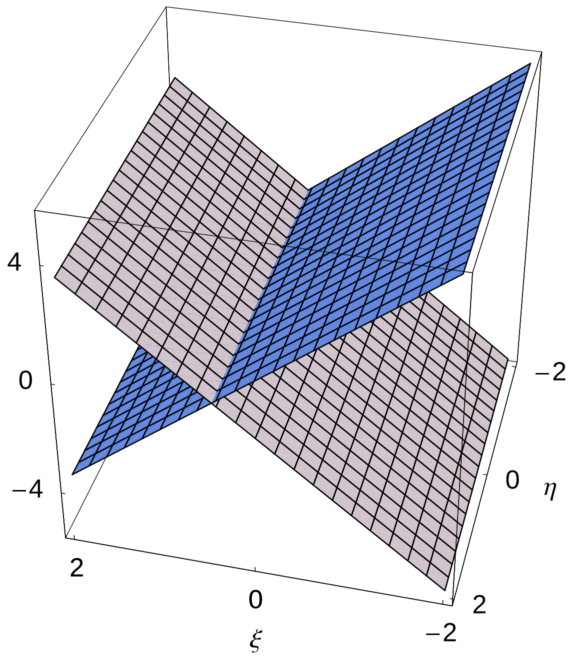
Cvičení 06. $F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 + 4y - 2z - 1.$

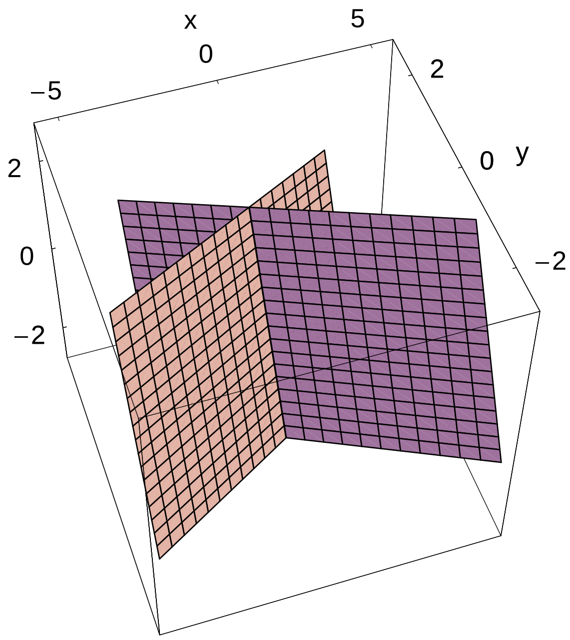
Vlastní čísla: $-5, 0, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 0, 0)$.

$$R: \ (\zeta + \sqrt{5}\xi - 1)(\zeta - \sqrt{5}\xi + 1) = 0,$$

různoběžné roviny svírající úhel $\arccos \frac{2}{3} \doteq 0.8410687$, tedy přibližně $48^\circ 11' 23''$.

Roviny $F(x, y, z) = 0$ mají rovnice $x - 2y + z + 1 = 0$ a $x + 2y - z - 1 = 0$.



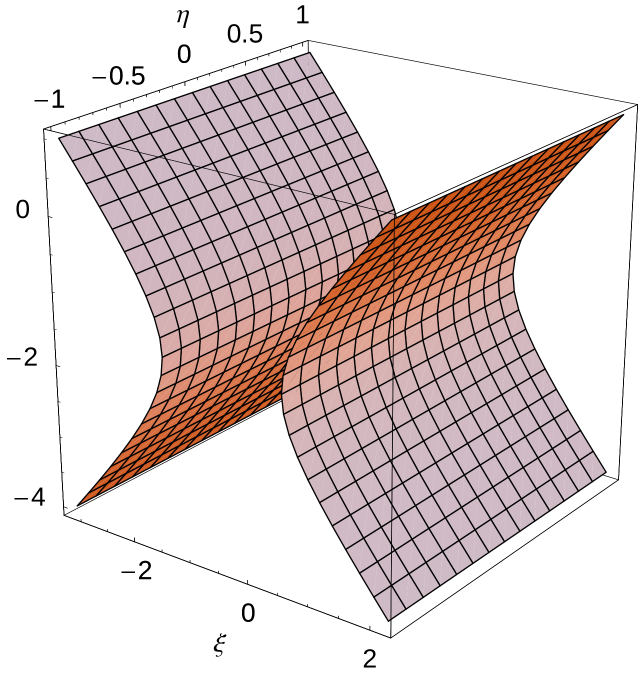


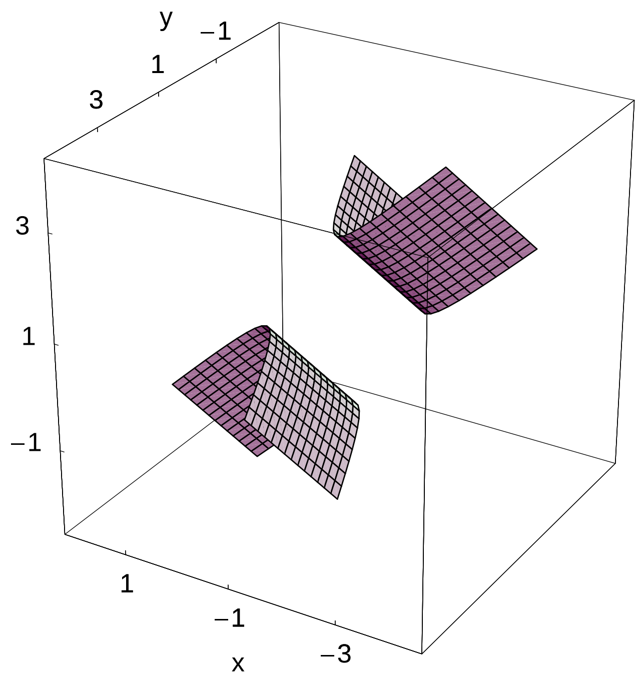
Cvičení 07. $F(x,y,z) = x^2 - 4xy + 4yz - z^2 + 5x - 8y - z + 9.$

Vlastní čísla: $-3, 0, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (2, -2, -1)$.

$$R: \ (\xi + \tfrac{1}{2})^2 - (\zeta + \tfrac{3}{2})^2 = 1,$$

hyperbolický válec.



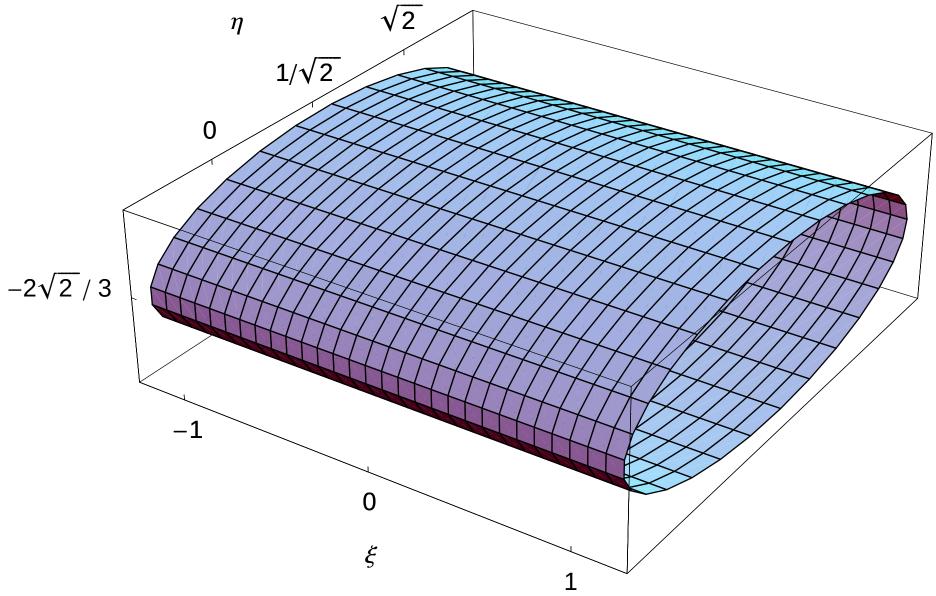


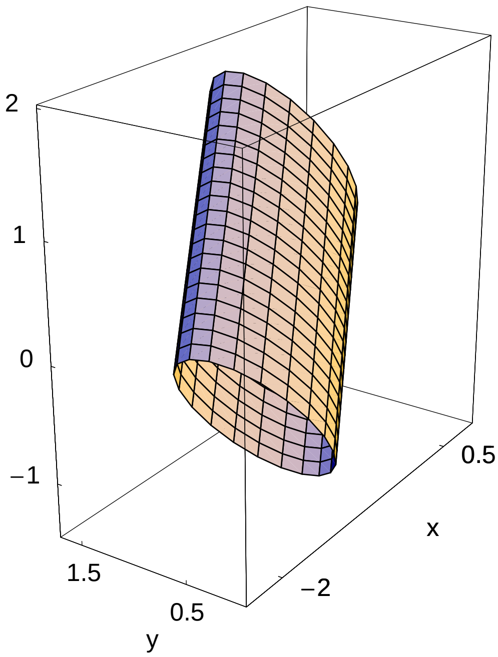
Cvičení 08. $F(x,y,z) = x^2 - 4xy + 8y^2 - 4yz + z^2 + 5x - 16y + 3z + 7.$

Vlastní čísla: $0, 1, 9$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -4, 1)$.

$$R:\ \frac{2}{3}\Big(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 6\Big(\zeta + \frac{2\sqrt{2})}{3}\Big)^2 = 1,$$

eliptický válec.





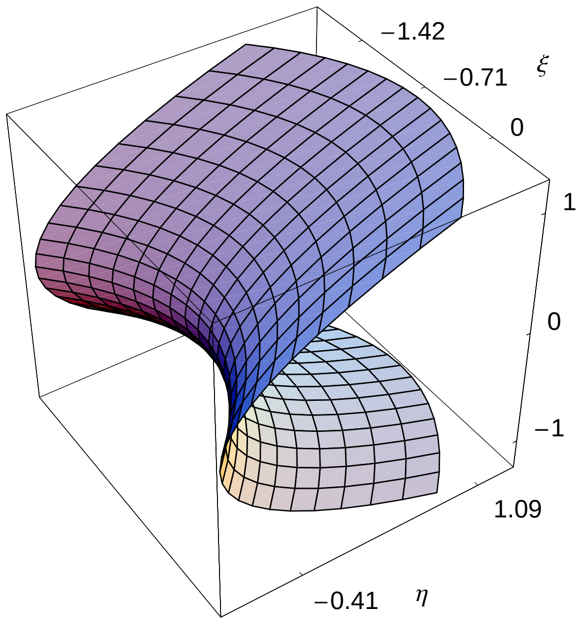
Cvičení 09. $F(x,y,z) = x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 4yz + 2z^2 - 4x + 4z - 3$.

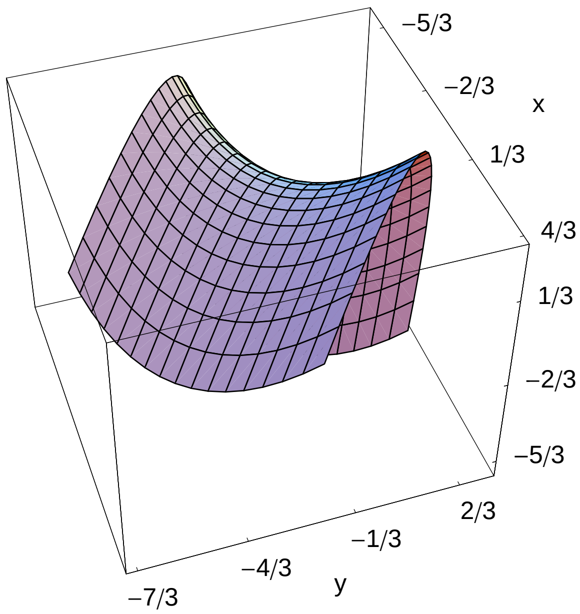
Vlastní čísla: $-2, 0, 6$. Vlastní vektor $f_3 = (-1, 1, -1)$.

$$R: \ \sqrt{6}\Big(\eta + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = -\Big(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 3\zeta^2,$$

hyperbolický paraboloid se sedlovým bodem $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6}, 0) \doteq (-0.71, -0.41, 0)$.

Sedlovým bodem hyperbolického paraboloidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $\big(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\big)$.



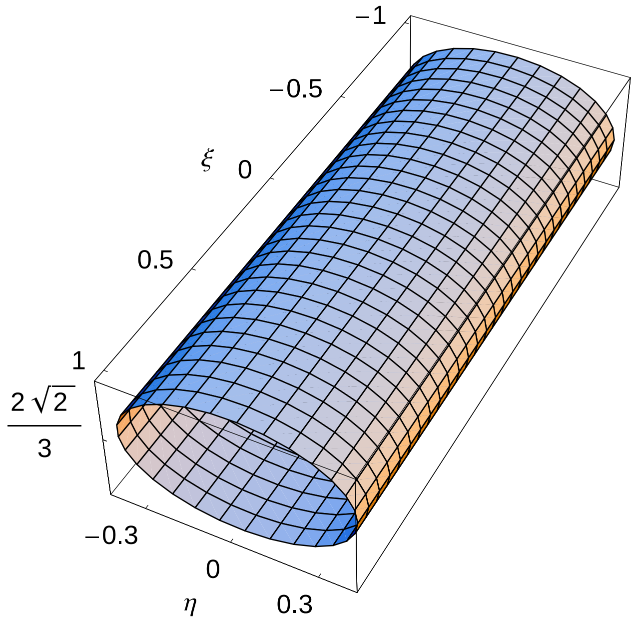


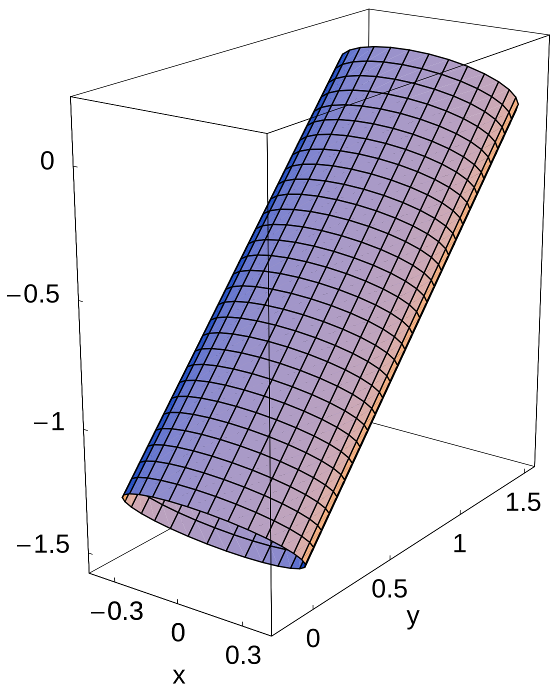
Cvičení 10. $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - 6yz + 3z^2 - 8y + 8z + 5.$

Vlastní čísla: $0, 2, 6$. Vlastní vektor $f_3 = (0, 1, -1)$.

$$R:\ 6\eta^2 + 18\left(\zeta - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1,$$

eliptický válec.





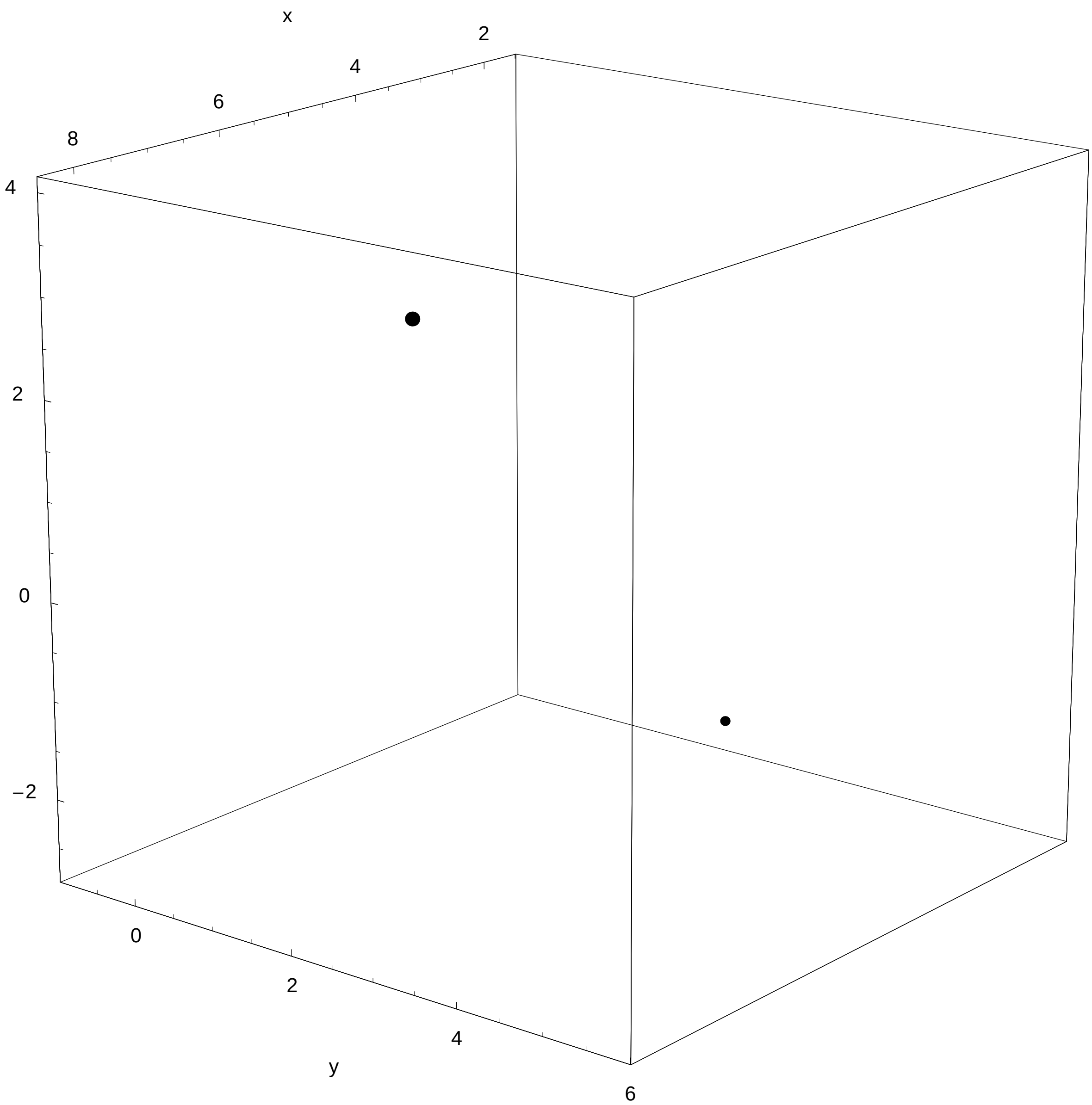
Cvičení 11. $F(x,y,z) = 3x^2 + 8xy - 6xz + 9y^2 - 12yz + 7z^2 - 26x - 32y + 10z + 75.$

Vlastní čísla: $1, 2, 16$. Vlastní vektor $f_3 = (-3, -6, 5)$.

$$R:\ (\xi - 2\sqrt{5})^2 + 2\Big(\eta - \frac{15}{\sqrt{14}}\Big)^2 + 16\Big(\zeta + \sqrt{\frac{10}{7}}\,\Big)^2 = 0,$$

jednobodová množina $(2/\sqrt{5}, 15/\sqrt{14}, -\sqrt{10/7}) \doteq (4.47, 4.01, -1.20)$ – na obrázku vpravo dole.

Jednobodová množina $F(x,y,z) = 0 : \big(\frac{11}{2}, 1, \frac{5}{2}\big)$ – na obrázku vlevo nahoře.



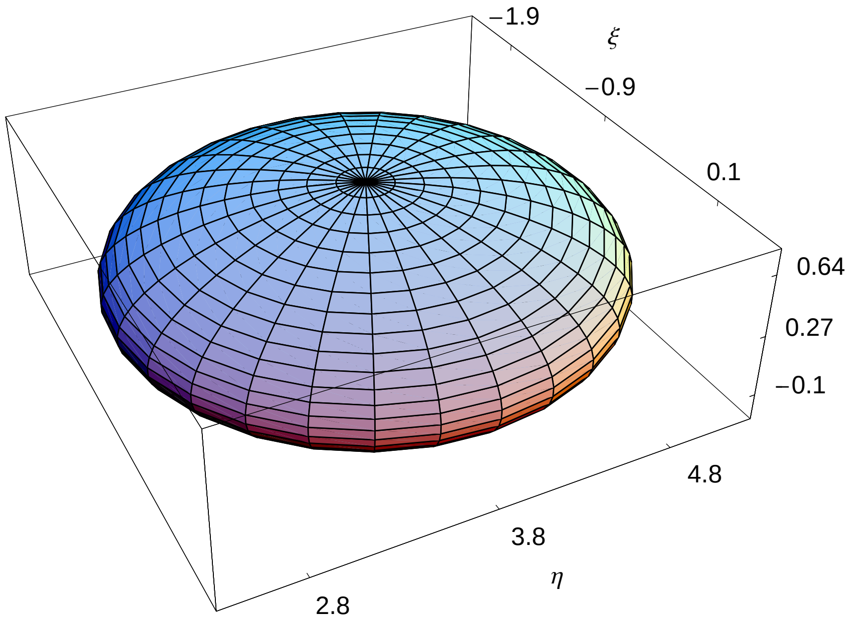
Cvičení 12. $F(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - 6xz + 6y^2 - 12yz + 11z^2 - 8y - 16z + 28.$

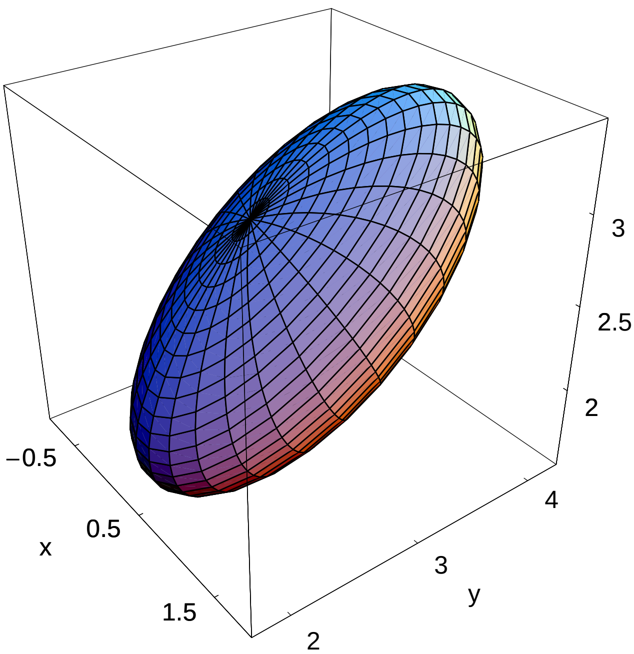
Vlastní čísla: $2, 2, 16$. Vlastní vektor $f_3 = (-1, -2, 3)$.

$$R: \ \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - 16\sqrt{\frac{2}{35}}\right)^2 + 4\left(\zeta - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 = 1,$$

rotační elipsoid o středu $(-2/\sqrt{5}, 16\sqrt{2/35}, \sqrt{1/14}) \doteq (-0.89, 3.82, 0.27)$.

Středem elipsoidu $F(x, y, z) = 0$ je bod $(\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2})$.





Cvičení 13. $F(x,y,z) = 4x^2 + 8xy - 4xz + 4y^2 - 4yz + z^2 - 16x - 16y + 8z - 9$.

Vlastní čísla: $0, 0, 9$. Vlastní vektor $f_3 = (-2,-2,1)$.

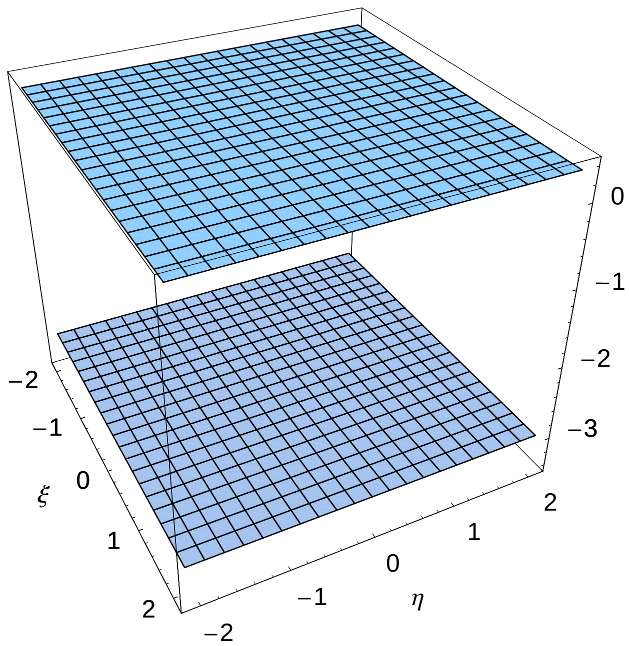
$$R:\ (\zeta+3)(\zeta-\tfrac{1}{3}) = 0,$$

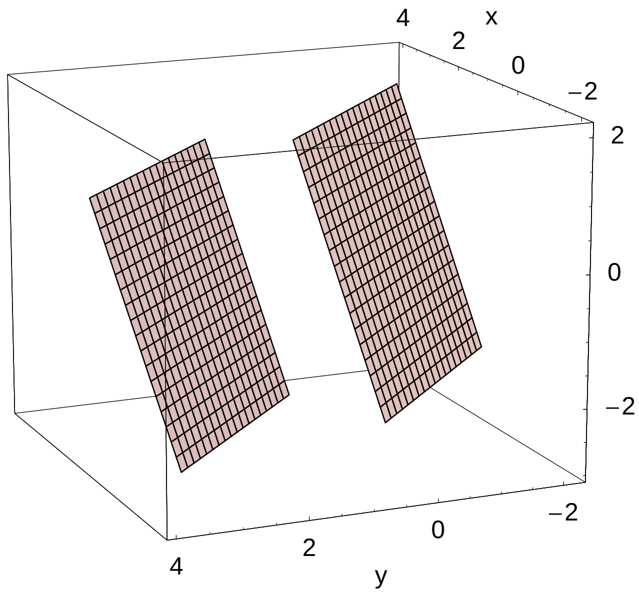
dvě roviny kolmé k ose z s popisem $\zeta = -3$ a $\zeta = \frac{1}{3}$.

$F = F_1 F_2$, kde $F_1(x,y,z) := -2x - 2y + z - 1$, $F_2(x,y,z) = -2x - 2y + z + 9$.

Roviny popsané rovnicí $F(x,y,z) = 0$ jsou kolmé k vektoru f_3 a jsou popsány rovnicemi

$$F_1(x,y,z) = 0 \ \text{ a } \ F_2(x,y,z) = 0\,.$$





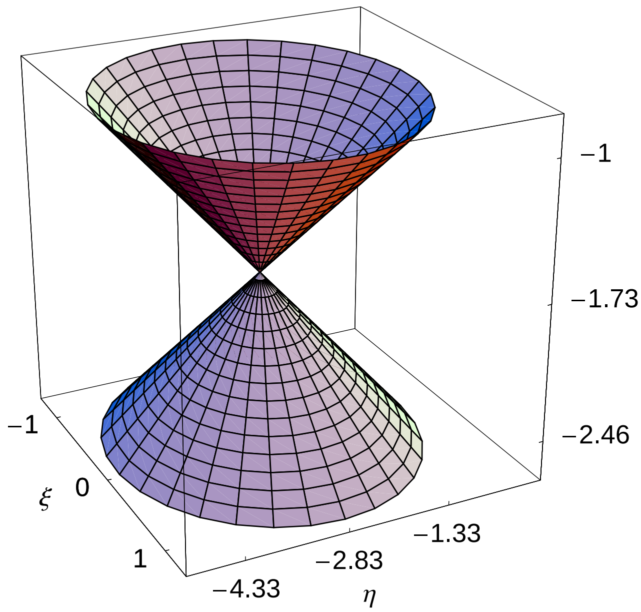
Cvičení 14. $F(x,y,z) = 6xy + 6xz + y^2 + 4yz + z^2 + 12x + 8y + 16z + 10$.

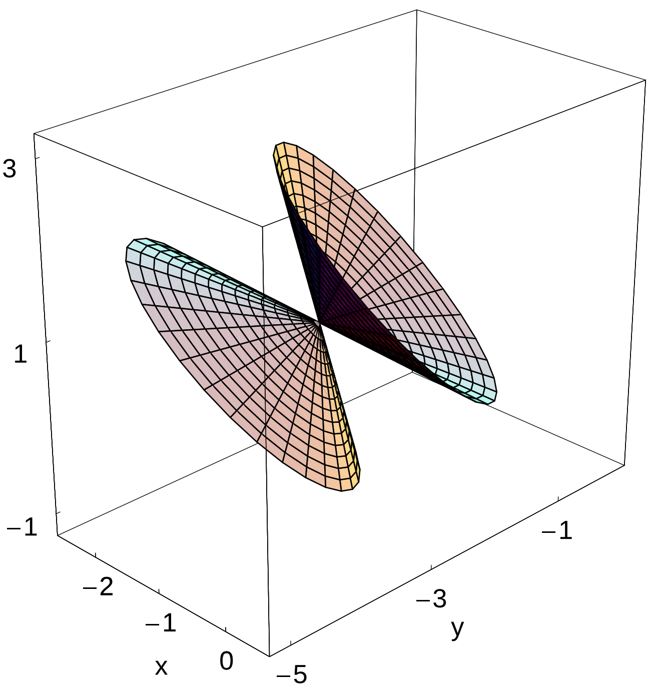
Vlastní čísla: $-3, -1, 6$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,1)$.

$$R:\ 3\xi^2 + (\eta + 2\sqrt{2}\,)^2 = 6\,(\zeta + \sqrt{3}\,)^2,$$

eliptický kužel s osou z a vrcholem $(0, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\,) \doteq (0, -2.83, -1.73)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má vrchol $(-1, -3, 1)$.





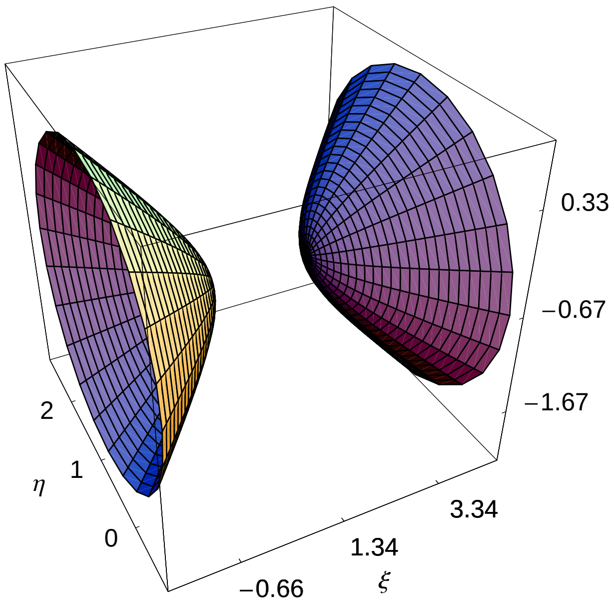
Cvičení 15. $F(x,y,z) = 3x^2 + 4xz + 3y^2 + 6x - 6y + 4$.

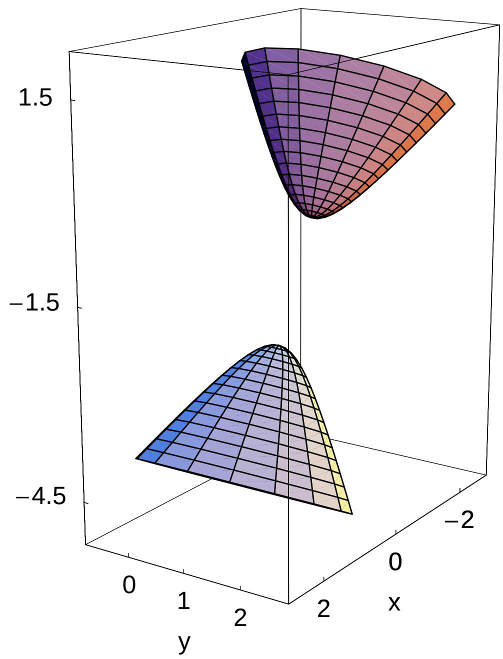
Vlastní čísla: $-1, 3, 4$. Vlastní vektor $f_3 = (2, 0, 1)$.

$$R: \ \left(\xi - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 3(\eta - 1)^2 - 4\left(\zeta + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 = 1,$$

dvojdílný hyperboloid se středem $(3/\sqrt{5}, 1, -3/(2\sqrt{5})) \doteq (1.34, 1, -0.67)$.

Středem hyperboloidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $\left(0, 1 - \frac{3}{2}\right)$.



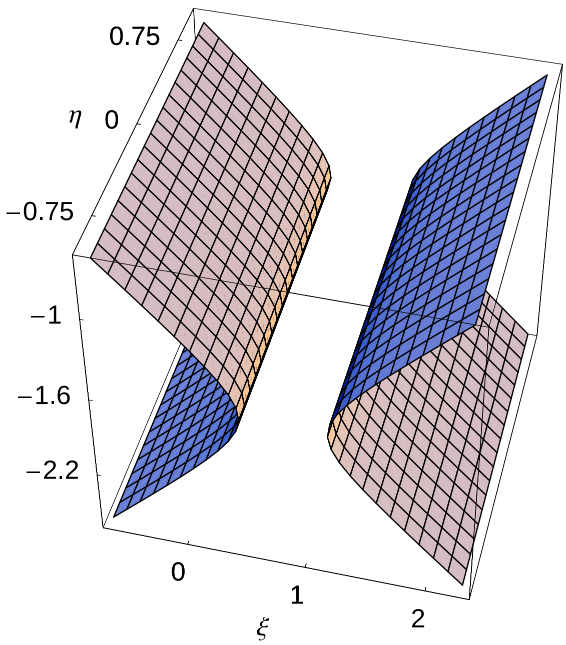


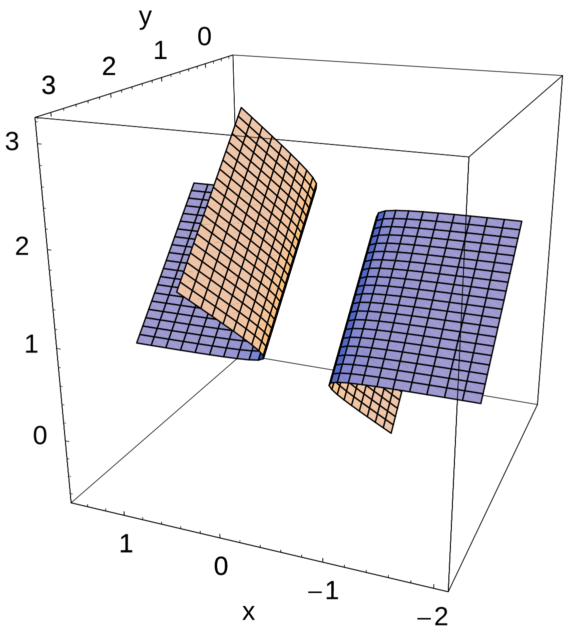
Cvičení 16. $F(x,y,z) = -4xy - 4xz + y^2 + 2yz + z^2 + 10x - 6y - 6z + 9.$

Vlastní čísla: $-2, 0, 4$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -1, -1)$.

$$R: \; 8\Big(\xi - \sqrt{\frac{2}{3}}\Big)^2 - 16\Big(\zeta + \frac{11}{4\sqrt{3}}\Big)^2 = 1,$$

hyperbolický válec.





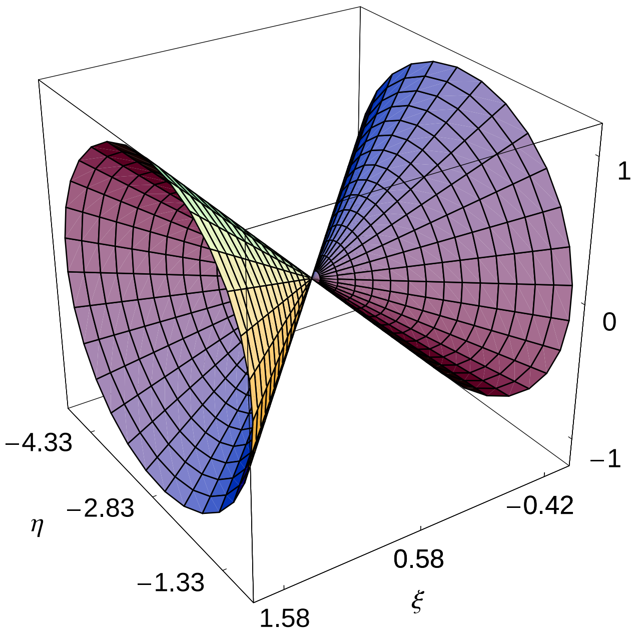
Cvičení 17. $F(x,y,z) = x^2 + 4xy - 4xz + 2yz + 2x + 2y + 6z + 7$.

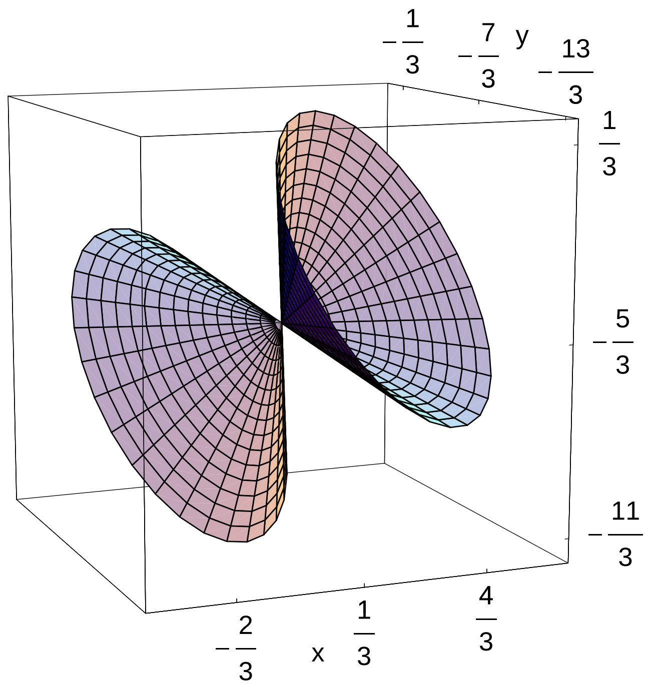
Vlastní čísla: $-3, 1, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (-2, -1, 1)$.

$$R: \; 3\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\eta + 2\sqrt{2})^2 + 3\zeta^2,$$

kužel s vrcholem $(1/\sqrt{3}, -2\sqrt{2}, 0) \doteq (0.58, -2.83, 0)$.

Vrcholem kuželu $F(x,y,z) = 0$ je bod $(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$, jeho osa má směr f_1.





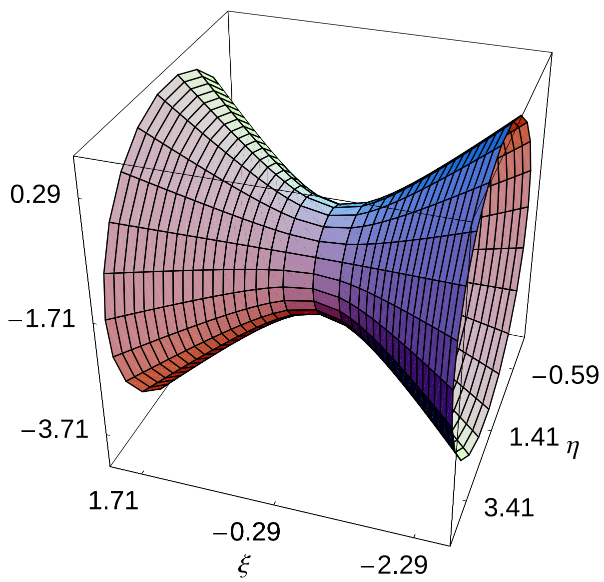
Cvičení 18. $F(x,y,z) = x^2 - 2xy - 4xz + y^2 - 4yz + 8y - 8z + 10.$

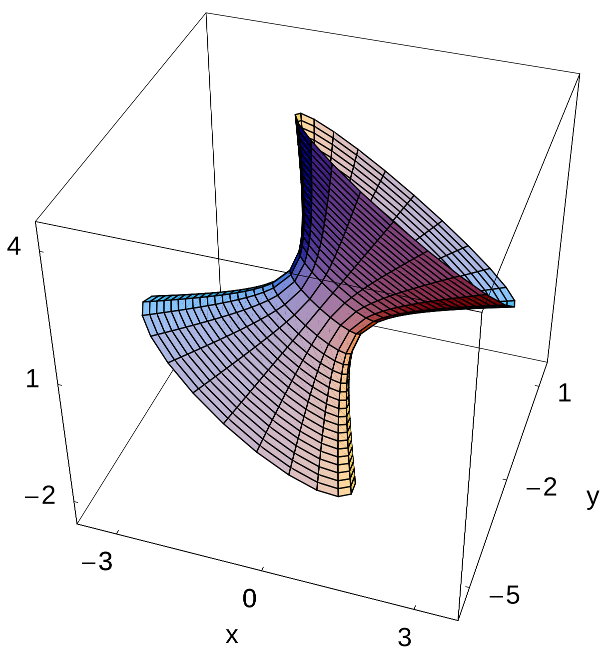
Vlastní čísla: $-2\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, -2\sqrt{2})$.

$$R:\ -\sqrt{2}\left(\xi + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\eta - \sqrt{2}\,)^2 + \sqrt{2}\left(\zeta + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

jednodílný hyperboloid se středem $(-(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}, \sqrt{2}, -(\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}\,) \doteq (0.29, -1.41, -1.71)$.

Středem hyperboloidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $(0, -2, 1)$.





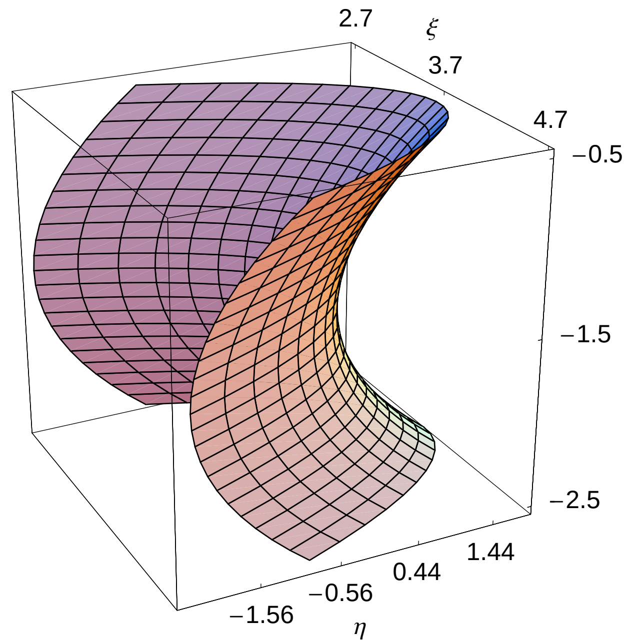
Cvičení 19. $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2yz - z^2 + 3x + 10y - 11z - 25.$

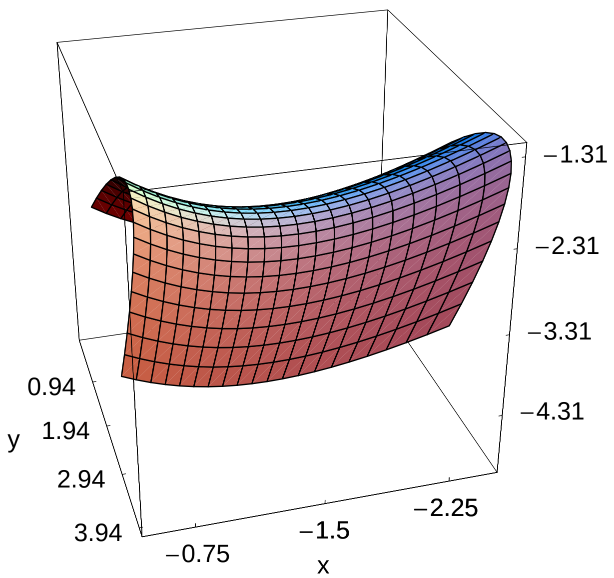
Vlastní čísla: $-2, 0, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1,0,0)$.

$$R:\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta - \frac{5\sqrt{2}}{16}\right) = -2\left(\xi - \frac{21}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\zeta + \tfrac{3}{2}\right)^2,$$

hyperbolický paraboloid se sedlovým bodem $\left(\frac{21}{8}\sqrt{2}, \frac{5}{16}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\right) \doteq (3.71, 0.44, -1.5)$.

Sedlovým bodem paraboloidu $F(x,y,z) = 0$ je bod $\frac{1}{16}(-24, 47, -37) \doteq (-1.5, 2.94, -2.31)$.





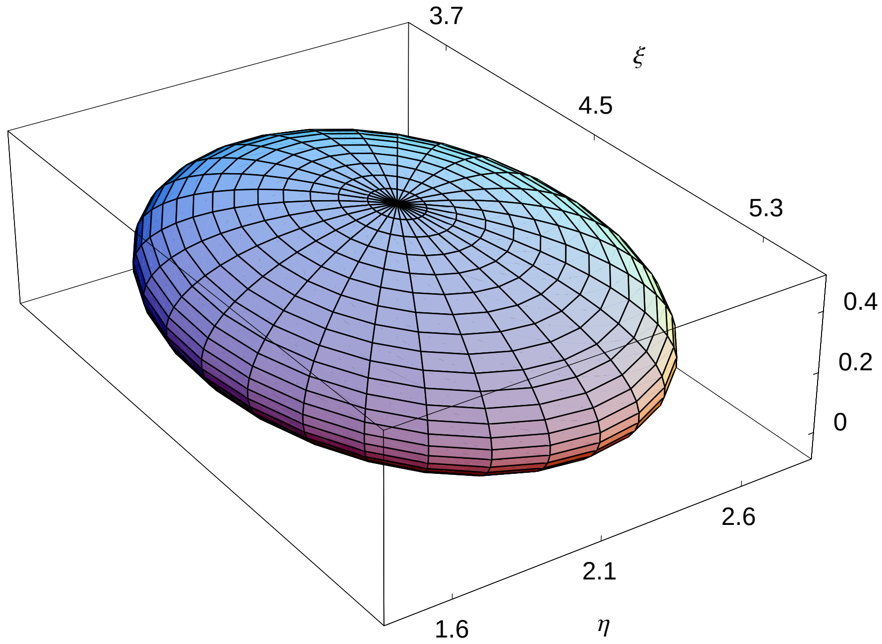
Cvičení 20. $F(x,y,z) = 6x^2 + 8xy + 6xz + 6y^2 + 6yz + 3z^2 - 12y + 6z + 29.$

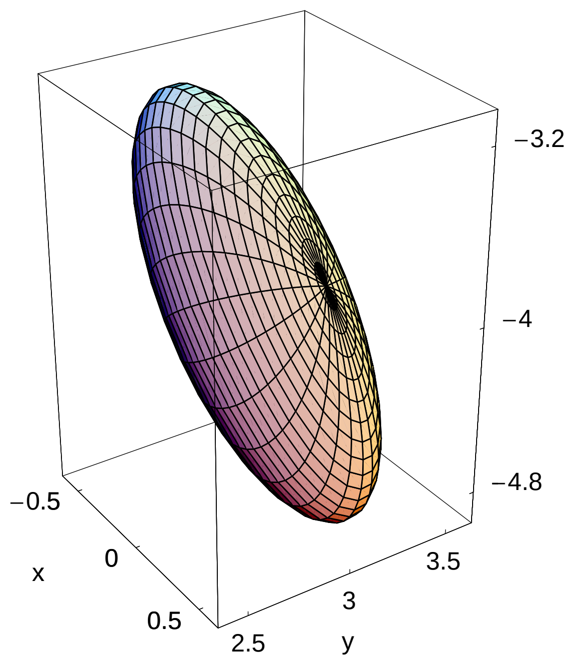
Vlastní čísla: $1, 2, 12$. Vlastní vektor $f_3 = (3,3,2)$.

$$R: \ \left(\xi - \frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2 + 2\left(\eta - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 12\left(\zeta - \frac{1}{\sqrt{22}}\right)^2 = 1,$$

elipsoid se středem $(15/\sqrt{11}, 3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{22}) \doteq (4.52, 2.12, 0.21)$.

Elipsoid $F(x,y,z) = 0$ má střed $(0,3,-4)$.





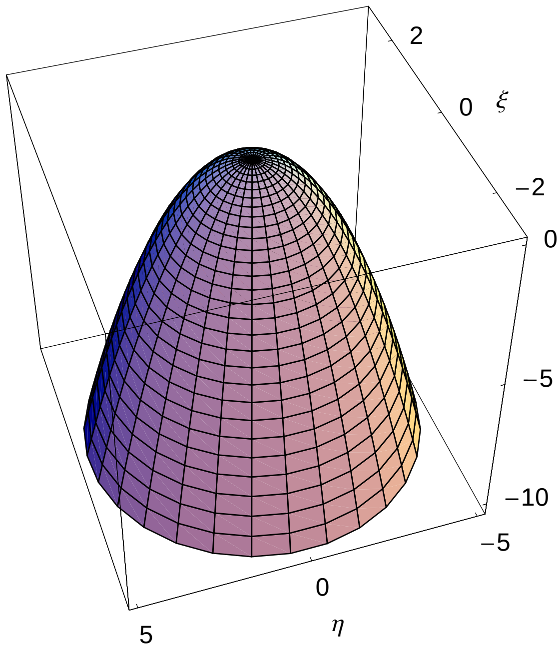
Cvičení 21. $F(x,y,z) = x^2 - 2xz + y^2 - 2yz + 2z^2 + \sqrt{2}\,(x+y+z)$.

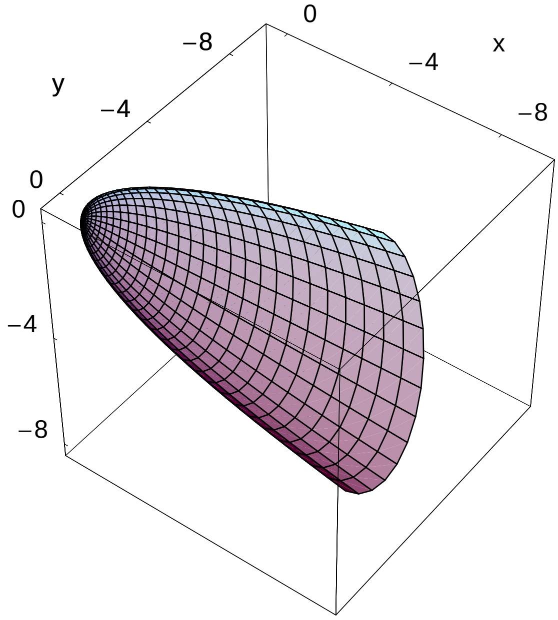
Vlastní čísla: $3, 1, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,1)$.

$$R: \; 3\xi^2 + \eta^2 = -\sqrt{6}\zeta,$$

eliptický paraboloid s vrcholem v počátku.

Vrcholem paraboloidu $F(x,y,z) = 0$ je také počátek, jeho osa má směr f_3.





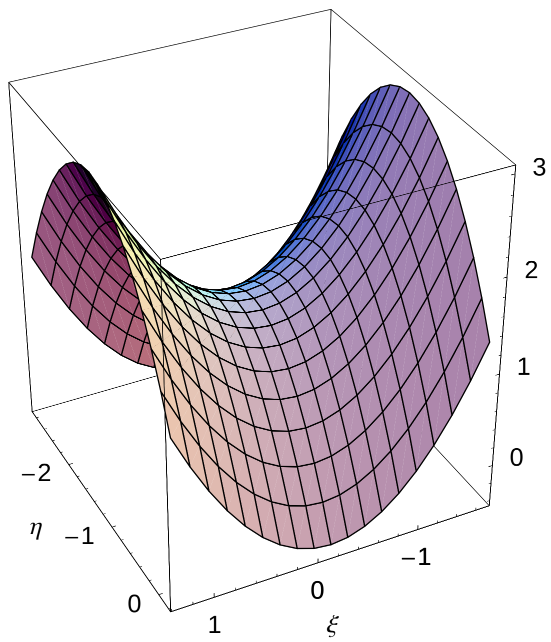
Cvičení 22. $F(x, y, z) = -4xy + 4xz - y^2 + z^2 + 6x - 6y + 3z$.

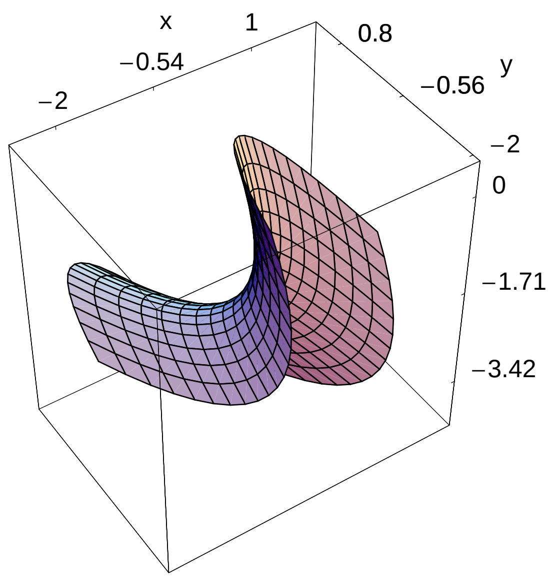
Vlastní čísla: $-3, 3, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -2, -2)$.

$$R: \; 4\left(\zeta - \tfrac{21}{16}\right) = 3\left(\xi + \tfrac{1}{6}\right)^2 - 3\left(\eta + \tfrac{4}{3}\right)^2,$$

hyperbolický paraboloid se sedlovým bodem $(-\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{21}{16}) \doteq (-1.67, -1.33, 0.31)$.

Paraboloid $F(x, y, z) = 0$ má sedlový bod $-\left(\frac{9}{16}, \frac{13}{24}, \frac{41}{24}\right) \doteq -(0.56, 0.54, 1.71)$.





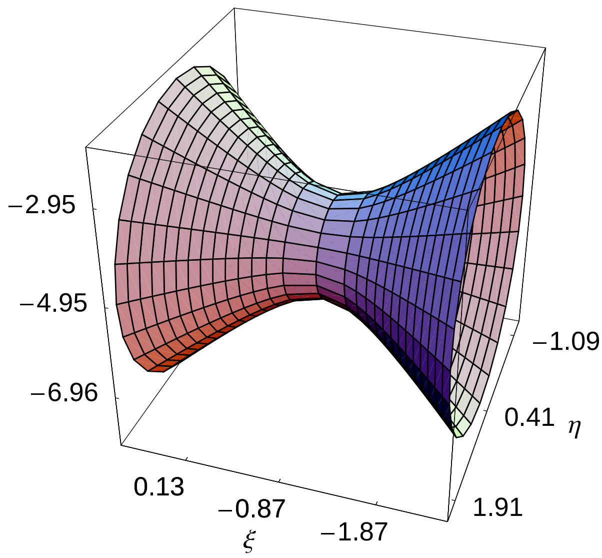
Cvičení 23. $F(x, y, z) = 8xy + 16xz - 16yz + 4z^2 + 36x + 20y - 20z + 87.$

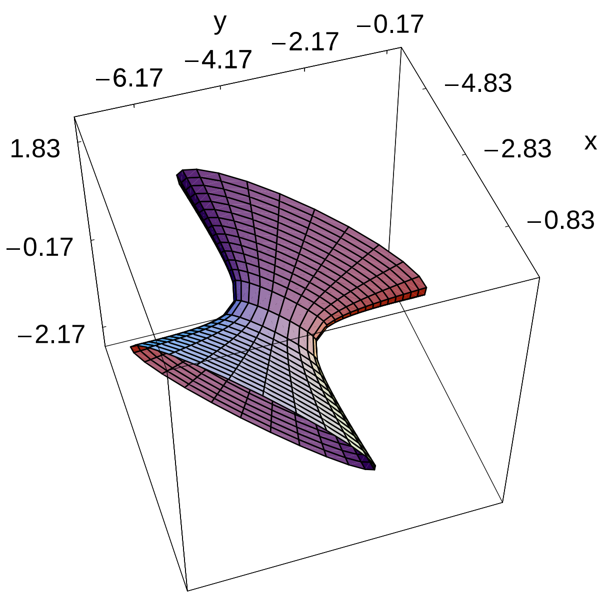
Vlastní čísla: $-3, 3, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, 0)$.

$$R: \; -3\left(\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

jednodílný hyperboloid se středem $(-\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{6}, -7/\sqrt{2}) \doteq (-0.87, 0.41, -4.95)$.

Hyperboloid $F(x, y, z) = 0$ má střed $-\frac{1}{6}(17, 25, 1) \doteq -(2.83, 4.17, 0.17)$.





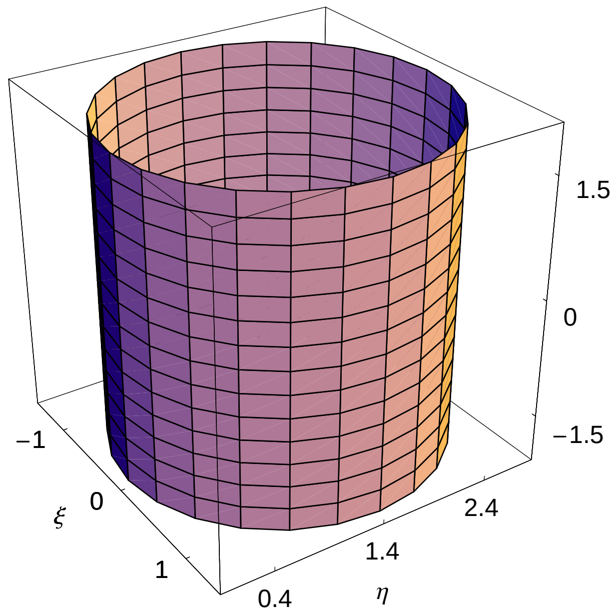
Cvičení 24. $F(x, y, z) = x^2 - xy + xz + y^2 + yz + z^2 + 3x - 3y$.

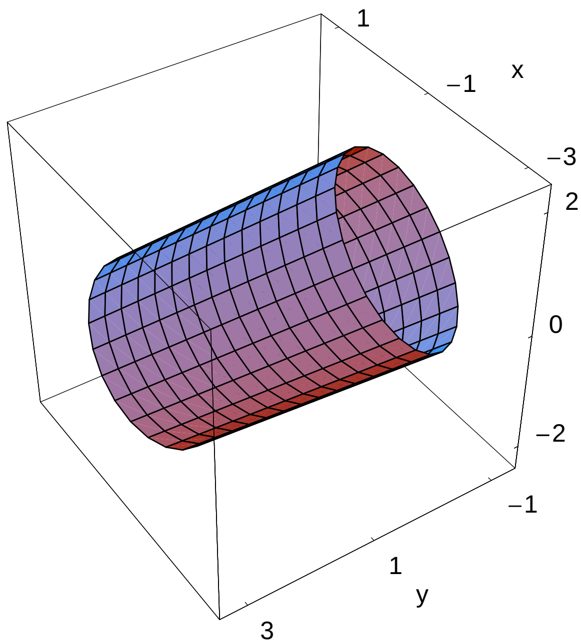
Vlastní čísla: $3, 3, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (-1, -1, 1)$.

$$R: \ \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{2}(\eta - \sqrt{2})^2 = 1,$$

kruhový válec s osou z.

Osa válce $F(x, y, z) = 0$ má směr f_3.





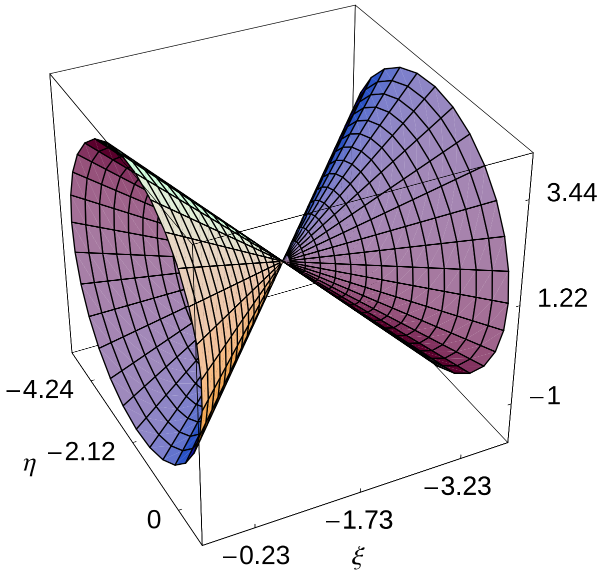
Cvičení 25. $F(x,y,z) = -xy + xz - yz + 3x - 3y$.

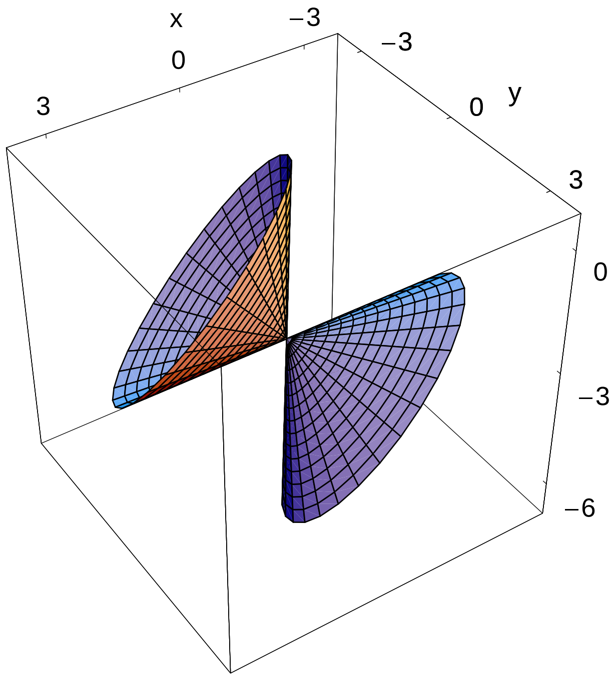
Vlastní čísla: $2, -1, -1$. Vlastní vektor $f_3 = (-1, -2, -1)$.

$$R:\ 2(\xi + \sqrt{3})^2 = \left(\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\zeta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

rotační kužel s vrcholem $(-\sqrt{3}, -3/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}) \doteq (-1.73, -2.12, 1.22)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má vrchol $(0,0,-3)$ a jeho osa má směr f_1.





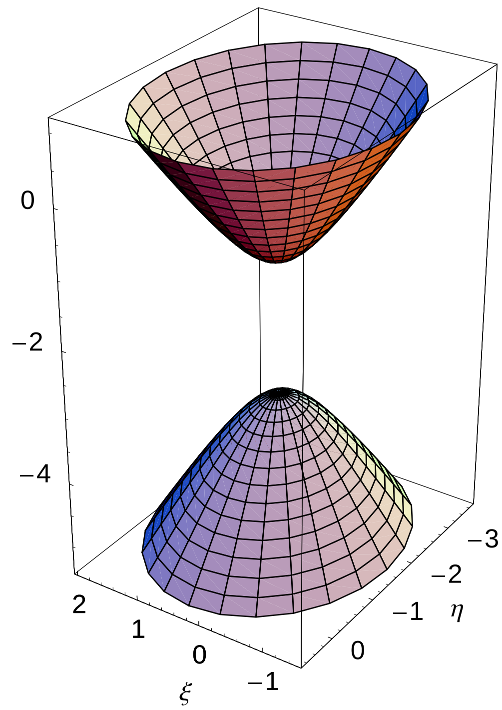
Cvičení 26. $F(x,y,z) = 6\,x^2 - 24\,xy + 6\,y^2 + 12\,z^2 - 12\,x - 24\,y + 36\,z + 7.$

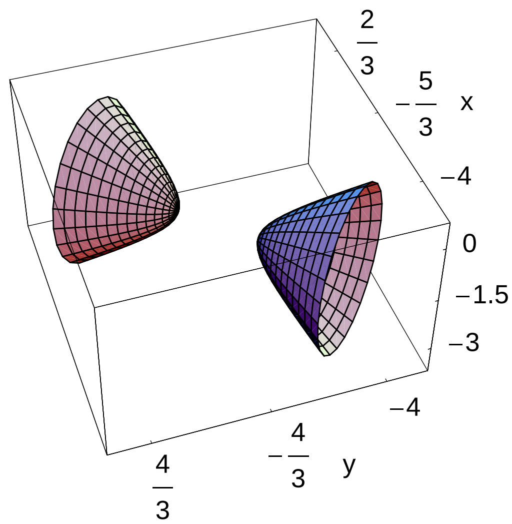
Vlastní čísla: $3, 2, -1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, 0)$.

$$R:\ -3\Big(\xi - \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big)^2 - 2\Big(\eta + \frac{3}{2}\Big)^2 + \Big(\zeta + \frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 1,$$

dvojdílný hyperboloid se středem $(1/(3\sqrt{2}), -3/2, -3/\sqrt{2}) \doteq (0.24, -1.5, -2.12)$.

Hyperboloid $F(x,y,z) = 0$ má střed $-\big(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}\big)$.





Cvičení 27. $F(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2 + 3\sqrt{2}(x-y) - 2z + 5$.

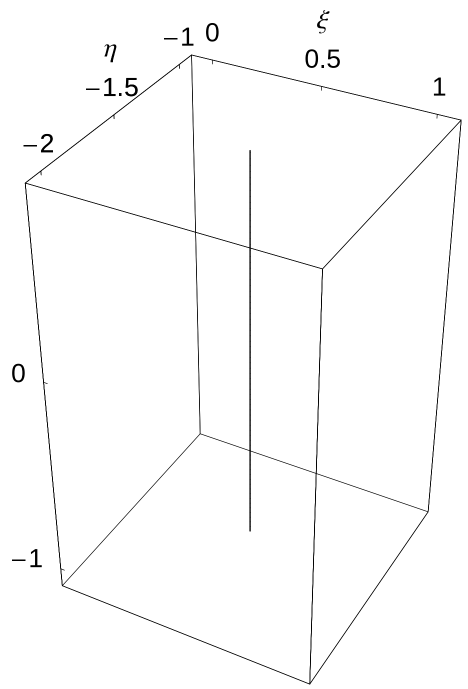
Vlastní čísla: $2, 2, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,0)$.

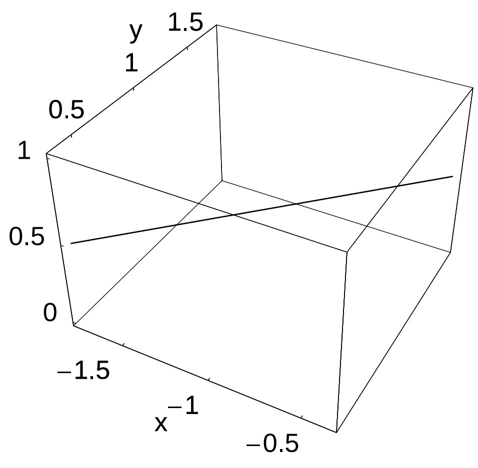
$$R: \ \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta + \tfrac{3}{2}\right)^2 = 0,$$

dvojnásobná přímka rovnoběžná s osou z.

Rovnice $F(x,y,z) = 0$ popisuje dvojnásobnou přímku, která má v rovině $z = \frac{1}{2}$ rovnici

$F(x,y,\frac{1}{2}) = \left(x - y + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 0$, tj. rovnici $y = x + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.





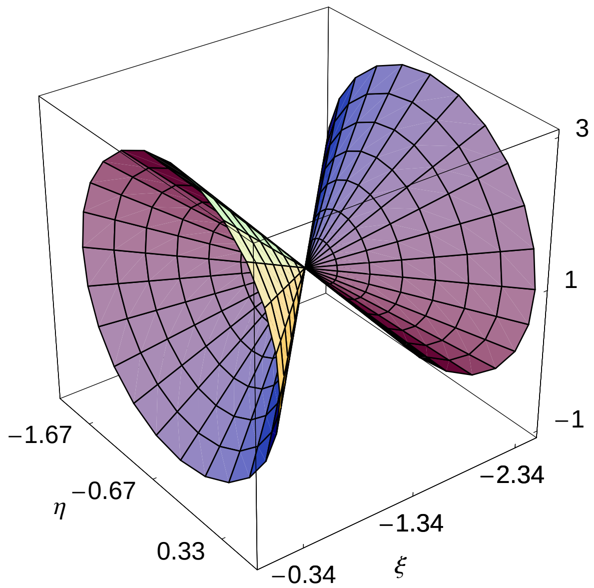
Cvičení 28. $F(x,y,z) = 2x^2 - 8xy - 4y^2 + 2z^2 - 12x - 12y - 4z - 7.$

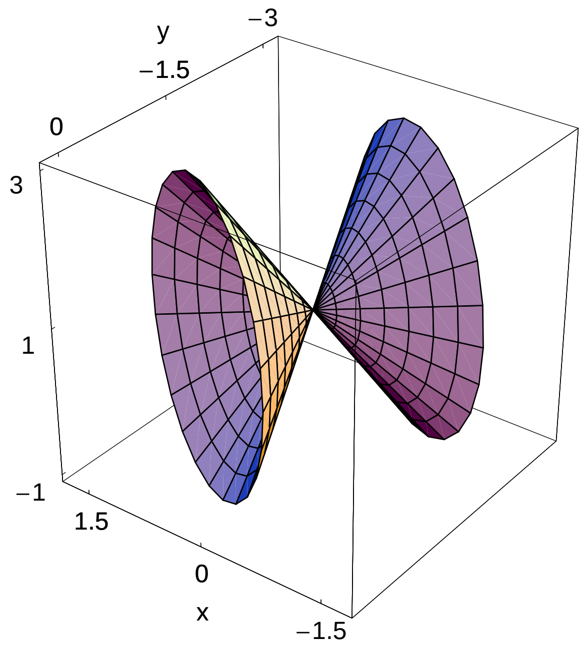
Vlastní čísla: $-3, 2, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (0,0,1)$.

$$R:\ 3\Big(\xi + \frac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2 = 2\Big(\eta + \frac{3}{2\sqrt{5}}\Big)^2 + (\zeta - 1)^2,$$

eliptický kužel s vrcholem $(-3/\sqrt{5}, -3/(2\sqrt{5}), 1) \doteq (-1.34, -0.67, 1)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má střed $(0, -\frac{3}{2}, 1)$, jeho osa má směr f_1.





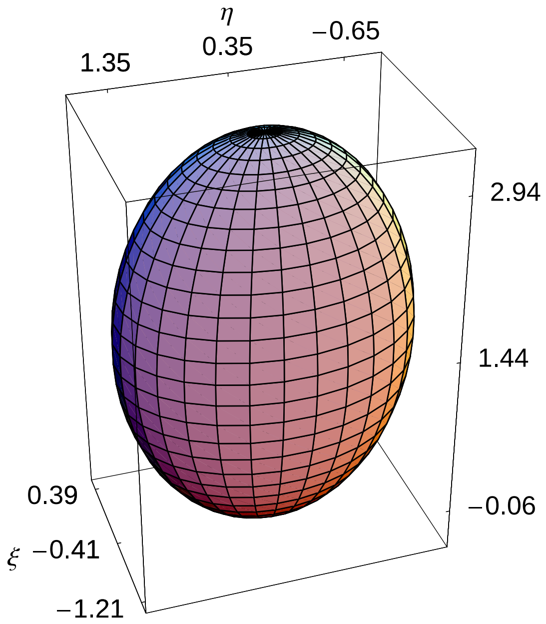
Cvičení 29. $F(x,y,z) = 8x^2 + 8xz + 8y^2 + 8yz + 12z^2 + 16x + 8y + 4z - 1.$

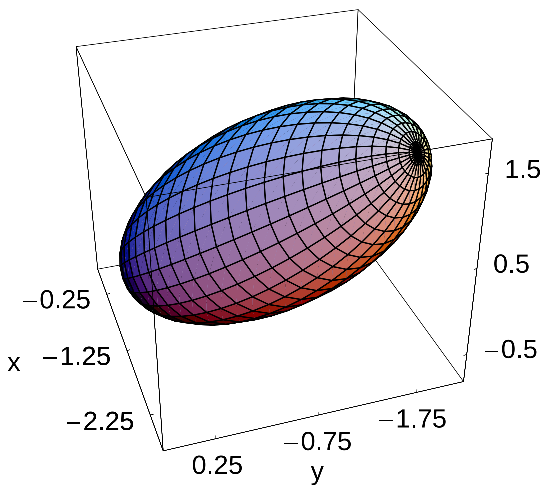
Vlastní čísla: $4, 2, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (-1,-1,1)$.

$$R:\ \frac{16}{13}\Big(\xi + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \frac{8}{13}\Big(\eta - \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{4}{13}\Big(\zeta - \frac{5}{2\sqrt{3}}\Big)^2 = 1,$$

elipsoid se středem $\big(-1/\sqrt{6}, 1/(2\sqrt{2}), 5/(2\sqrt{3})\big) \doteq (-0.41, 0.35, 1.44)$.

Elipsoid $F(x,y,z) = 0$ má střed $\big(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\big)$.





Cvičení 30. $F(x,y,z) = 20\,x^2 + 40\sqrt{2}\,xy + 40\sqrt{2}\,xz + 40\,y^2 + 80\,yz + 40\,z^2 + 20\sqrt{5}\,x + 1.$

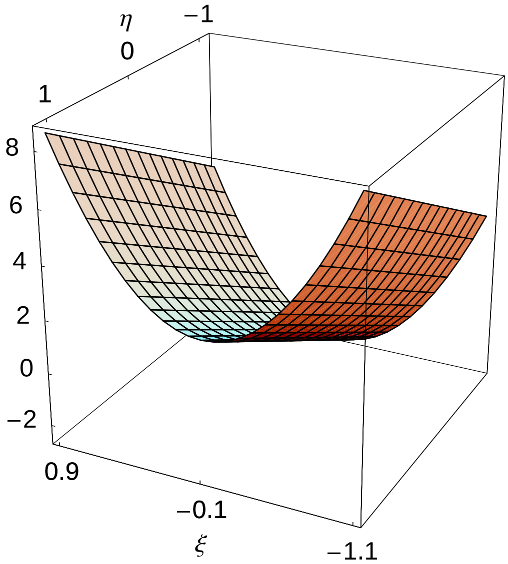
Vlastní čísla: $5, 0, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (-\sqrt{2}, 3, -2)$.

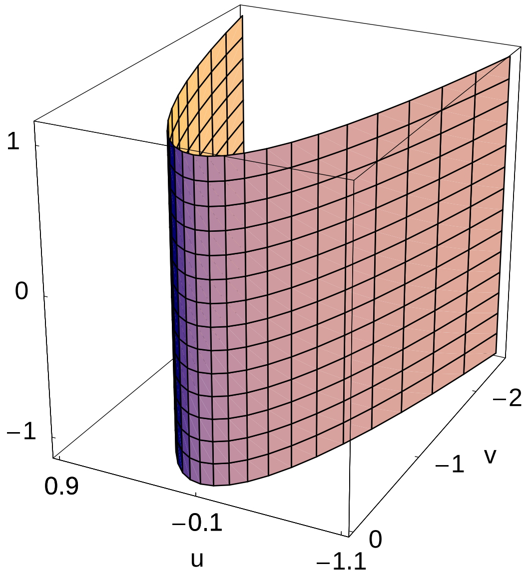
$$R:\ 5\left(\xi + \frac{1}{10}\right)^2 = -\sqrt{\frac{10}{3}}\,\eta + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\zeta, \quad \text{parabolický válec.}$$

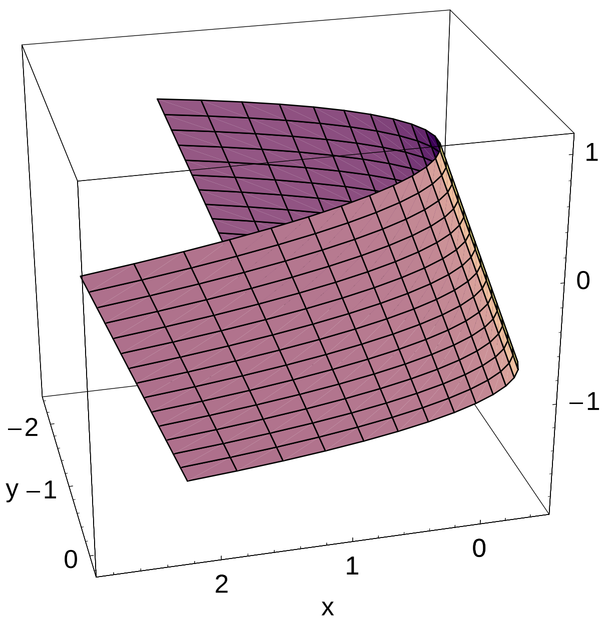
Provedeme-li ještě rotaci kolem osy ξ o úhel $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{5})$ (přibližně o $24^\circ\,5'\,41''$) a označíme-li nové souřadnice $u\,(=\xi), v, w$, bude výsledný válec popsán rovnicí

$$RR:\ w = -\frac{5}{2}\left(u + \frac{1}{10}\right)^2.$$

Na obrázku nahoře válce R a RR, dole válec $F(x,y,z) = 0$.







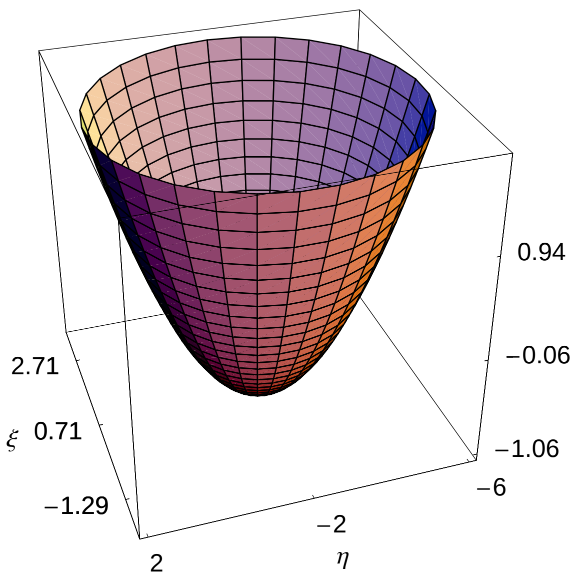
Cvičení 31. $F(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1.$

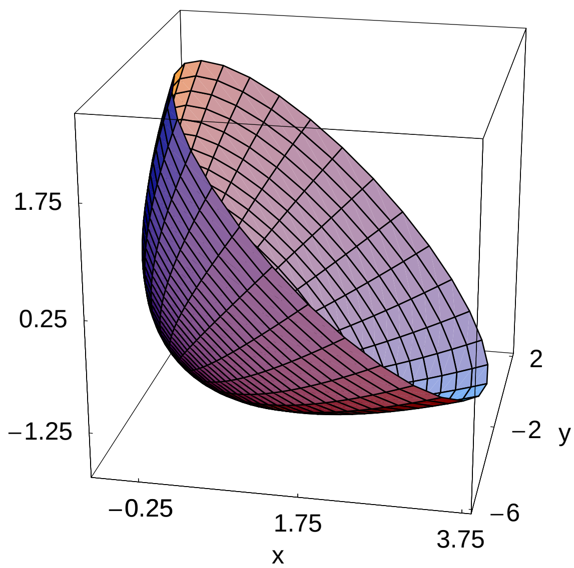
Vlastní čísla: $2, 1, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 0, 1)$.

$$R: \; 2\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\eta + 2)^2 = 4\sqrt{2}\left(\zeta + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right),$$

eliptický paraboloid s vrcholem $(1/\sqrt{2}, -2, -3/(2\sqrt{2})) \doteq (0.71, -2, -1.06)$.

Paraboloid $F(x, y, z) = 0$ má vrchol $-\left(\frac{1}{4}, 2, \frac{5}{4}\right)$.





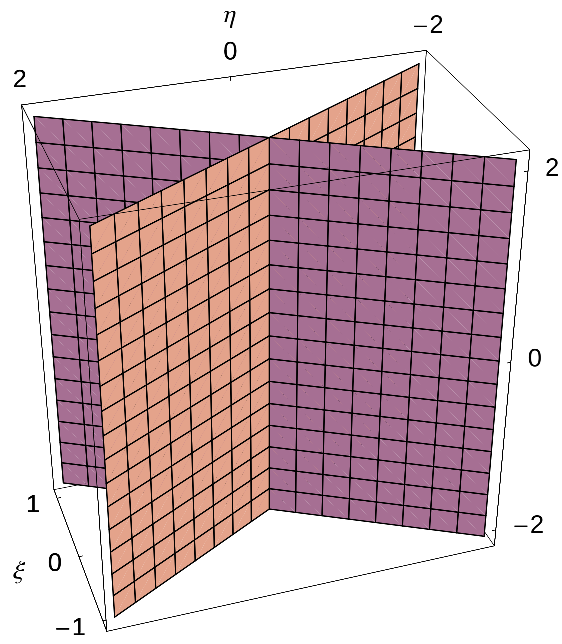
Cvičení 32. $F(x,y,z) = x^2 + xy - xz - yz$.

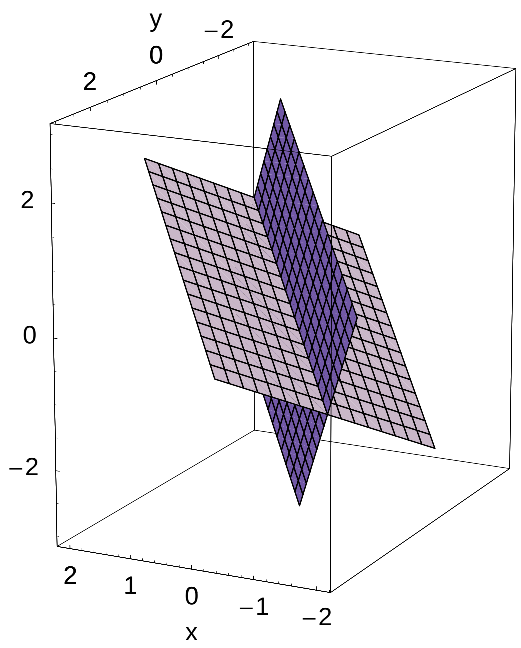
Vlastní čísla: $-6, 2, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -1, 1)$.

$R: \ \eta^2 = 3\xi^2$,

různoběžné roviny svírající úhel $\frac{1}{3}\pi$ (60°).

Roviny $F(x,y,z) = 0$ mají popis $x + y = 0$ a $x - z = 0$.



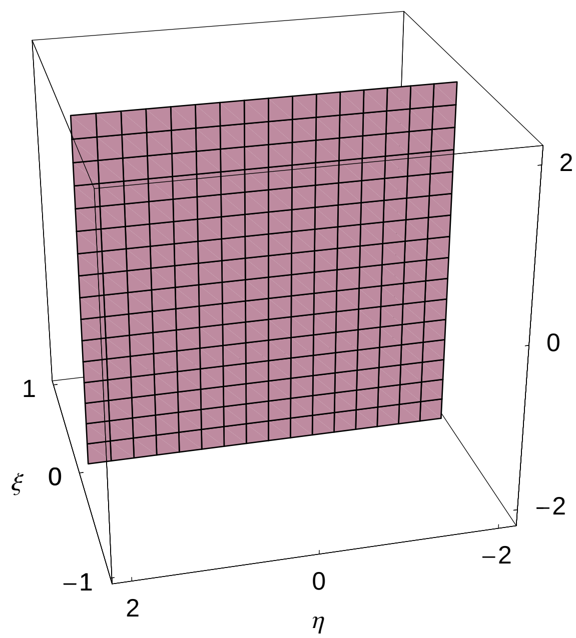


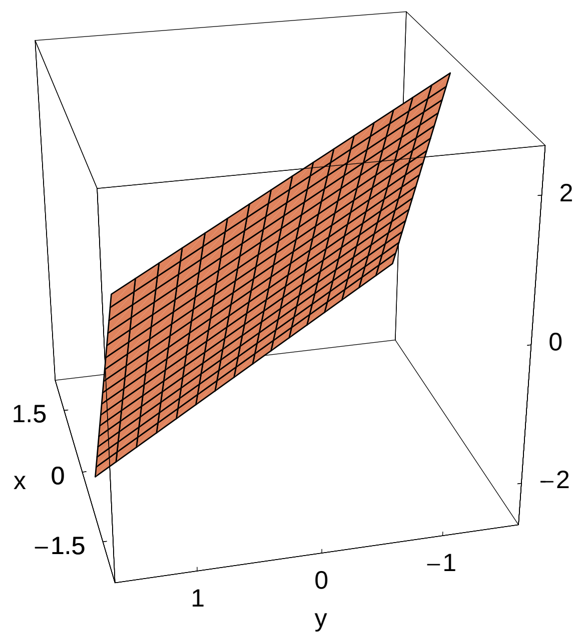
Cvičení 33. $F(x,y,z) = 4x^2 + 8xy + 4xz + 4y^2 + 4yz + z^2$.

Vlastní čísla: $9, 0, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (4, -5, 2)$.

$R:\ \xi^2 = 0$, dvojnásobná rovina.

Rovina $F(x,y,z) = 0$ má rovnici $(2x + 2y + z)^2 = 0$.





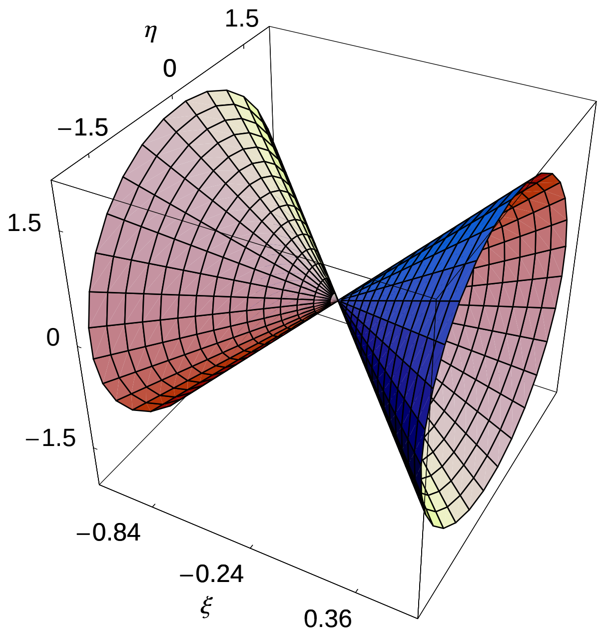
Cvičení 34. $F(x,y,z) = 20\,xy + 40\,xz - 40\,yz - 30\,z^2 + 10\,x - 10\,y - 20\,z - 3.$

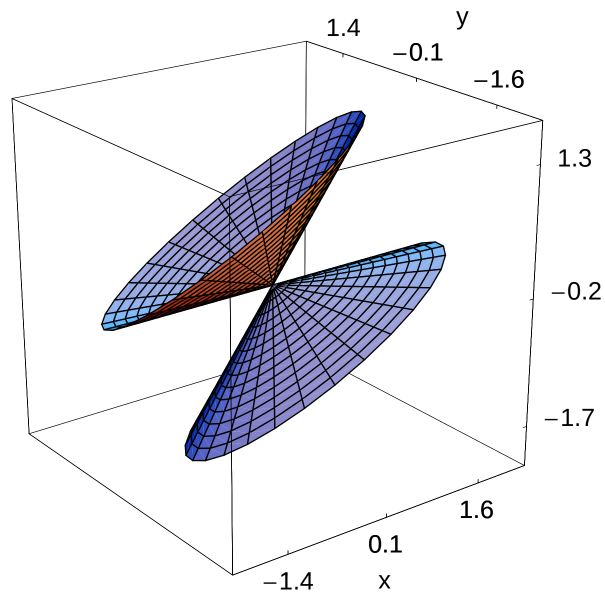
Vlastní čísla: $-5, 1, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 5, -2)$.

$$R: \;\eta^2 + \zeta^2 = 5\left(\xi + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\right)^2$$

rotační kužel s vrcholem $(-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0) \doteq (-0.24, 0, 0)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má vrchol $\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right)$ a jeho osa má směr f_1.





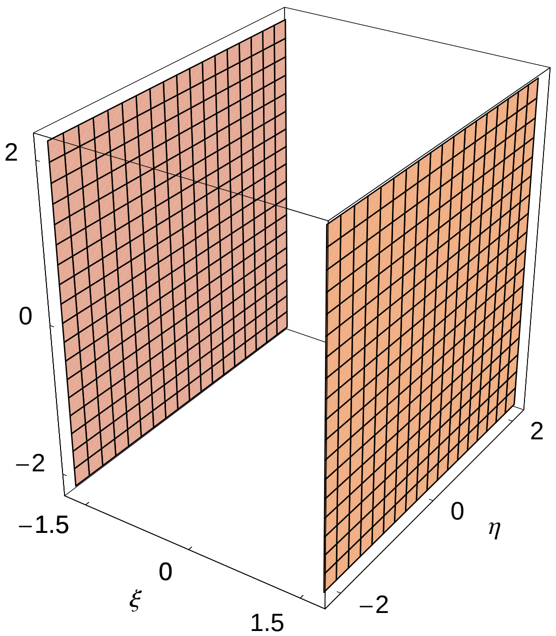
Cvičení 35. $F(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2xz + y^2 - 2yz + z^2 - 9.$

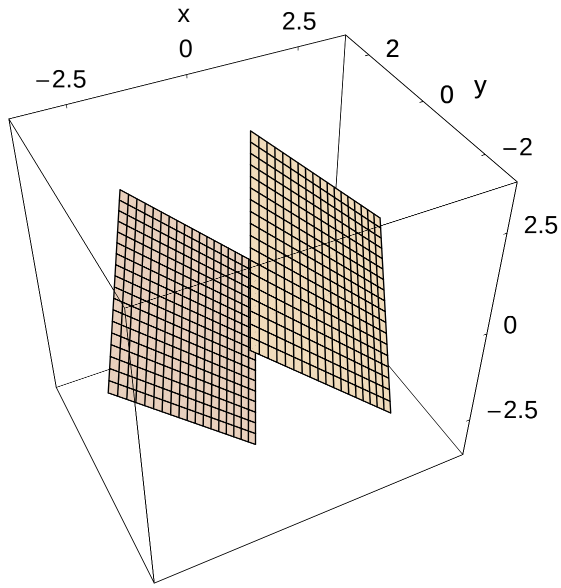
Vlastní čísla: $3, 0, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,2,1)$.

$$R: \ \xi^2 = 3,$$

dvě různé roviny kolmé k ose ξ.

Roviny $F(x,y,z) = 0$ mají rovnice $x - y + z = \pm 3$, kolmice k nim má směr f_1.





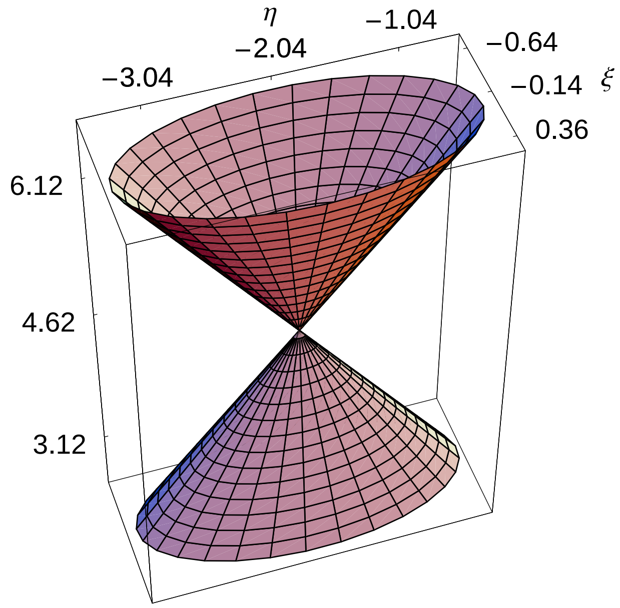
Cvičení 36. $F(x,y,z) = 5x^2 - 10xy + 10xz + 25y^2 + 50yz + 25z^2 + 60x + 20y - 64.$

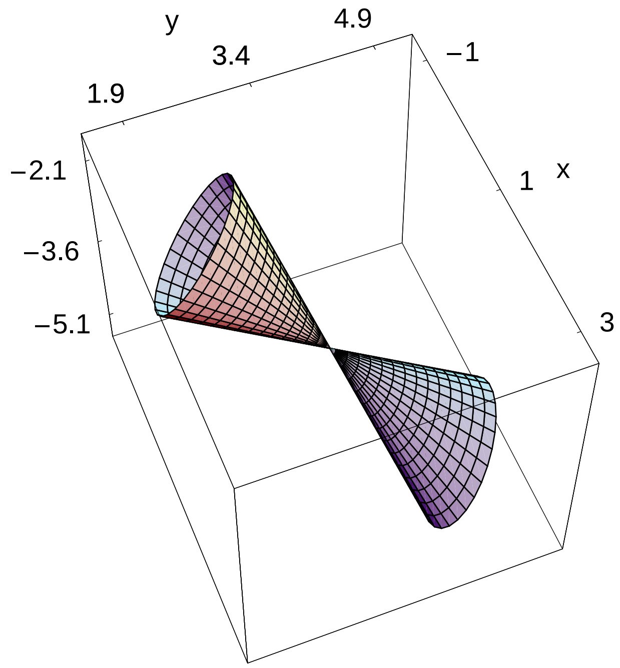
Vlastní čísla: $10, 2, -1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 1, -1)$.

$$R: \ 10\left(\xi + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\eta + \frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\zeta - \frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

eliptický kužel s vrcholem $(-1/(5\sqrt{2}), -5/\sqrt{6}, 8/\sqrt{3}) \doteq (-0.14, -2.04, 4.62)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má vrchol $\left(1, \frac{17}{5}, -\frac{18}{5}\right) \doteq (1, 3.4, -3.6)$.





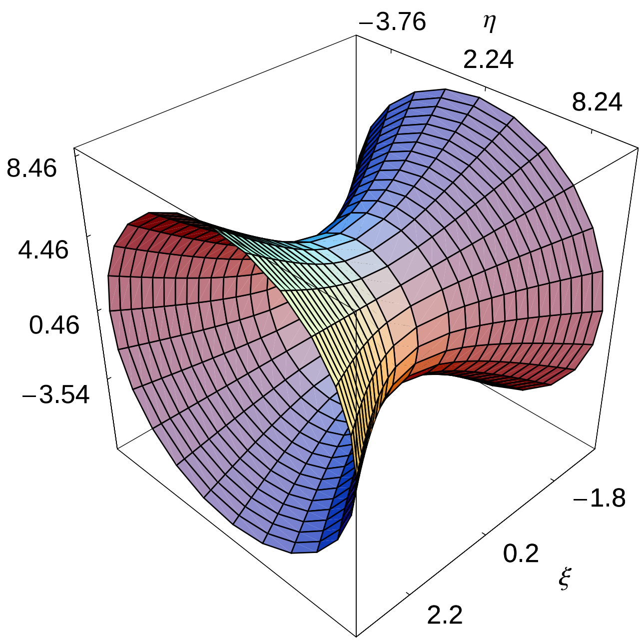
Cvičení 37. $F(x,y,z) = 2xy + 4xz - 4yz - 3z^2 - 5x - 10$.

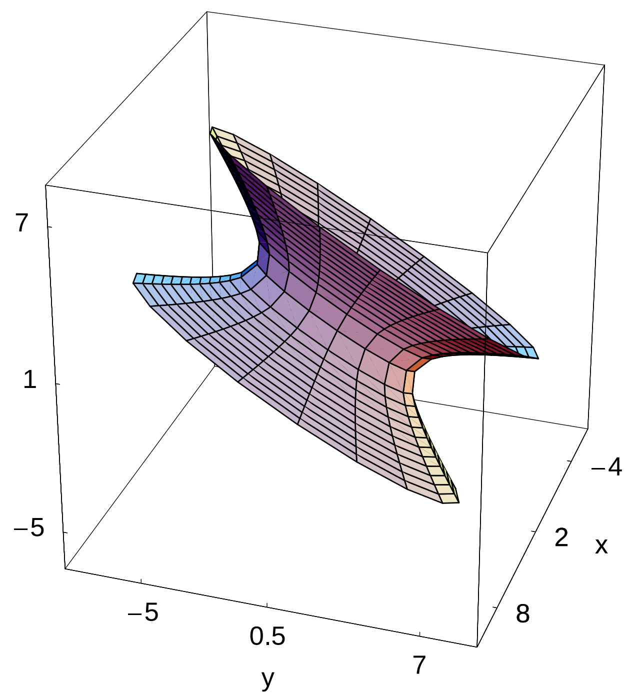
Vlastní čísla: $-5, 1, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 5, -2)$.

$$R: \ -\frac{1}{3}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{1}{15}(\eta - \sqrt{5})^2 + \frac{1}{15}\left(\zeta - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2 = 1,$$

jednodílný rotační hyperboloid se středem $(1/(2\sqrt{6}), \sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5/6}) \doteq (0.20, 2.24, 0.46)$.

Hyperboloid $F(x,y,z) = 0$ má střed $(2, \frac{1}{2}, 1)$.





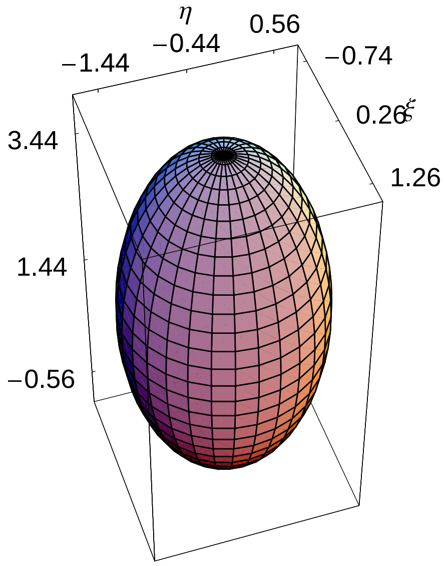
Cvičení 38. $F(x,y,z) = 24x^2 - 16xy - 16xz + 24y^2 - 16yz + 24z^2 - 40x - 23.$

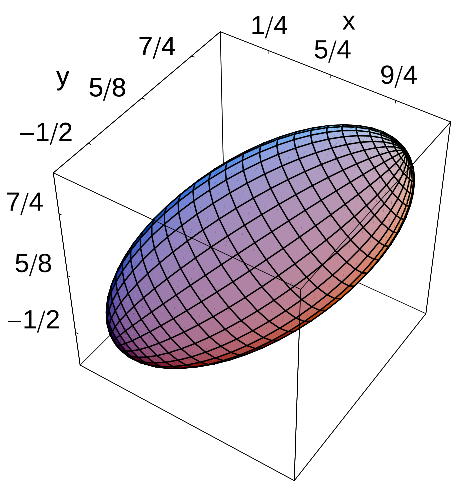
Vlastní čísla: $4, 4, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,1)$.

$$R: \ \frac{2}{3}\Big(\xi - \frac{5}{8\sqrt{6}}\Big)^2 + \frac{2}{3}\Big(\eta + \frac{5}{8\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\zeta - \frac{5}{2\sqrt{3}}\Big)^2 = 1,$$

rotační elipsoid se středem $(5/(8\sqrt{6}), -5/(8\sqrt{2}), 5/(2\sqrt{3})) \doteq (0.26, -0.44, 1.44)$.

Elipsoid $F(x,y,z) = 0$ má střed $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) = (1.25, 0.625, 0.625)$.





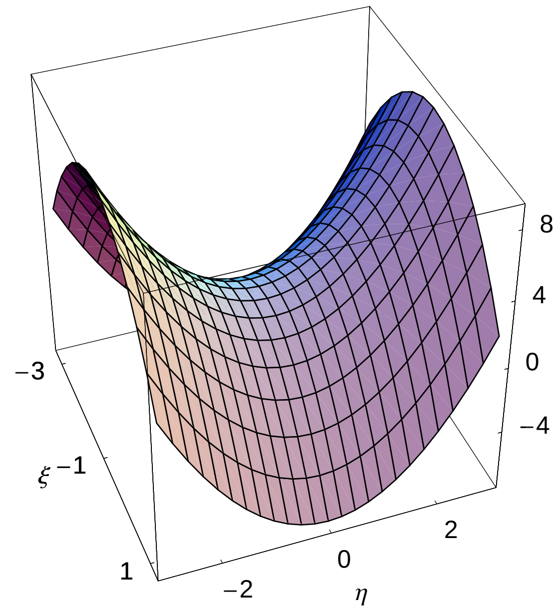
Cvičení 39. $F(x,y,z) = x^2 - 2xz - 3y^2 + z^2 - \sqrt{2}x - 6y - \sqrt{2}z - 3.$

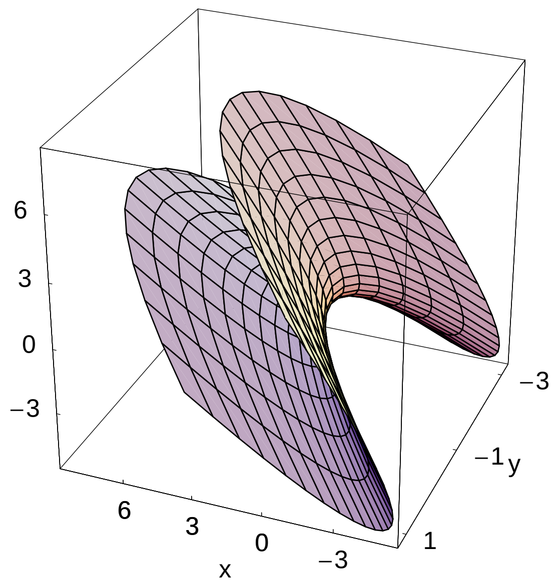
Vlastní čísla: $-3, 2, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,0,1)$.

$$R:\ 3(\xi+1)^2 - 2\eta^2 = -2\zeta$$

hyperbolický paraboloid se sedlovým bodem $(-1,0,0)$.

Sedlovým bodem paraboloidu $F(x,y,z)=0$ je bod $(0,-1,0)$.



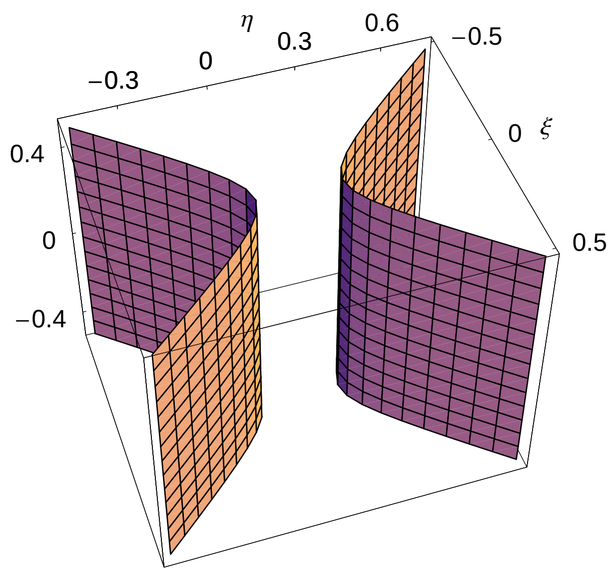


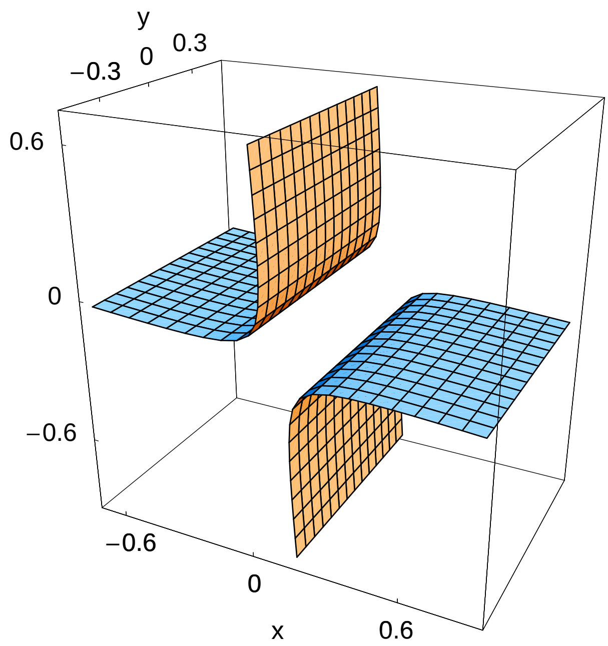
Cvičení 40. $F(x,y,z) = x^2 + 12xz + z^2 + x - z$.

Vlastní čísla: $7, -5, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (0,1,0)$.

$$R: \ -70\xi^2 + 50\left(\eta - \frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

hyperbolický válec.



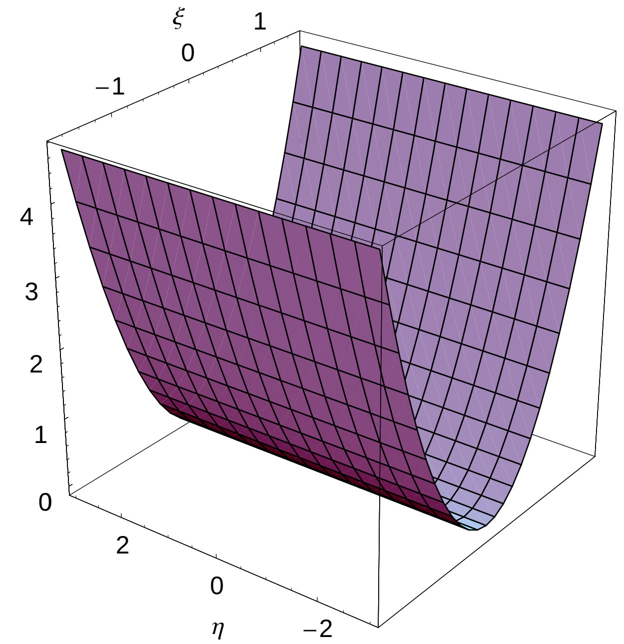


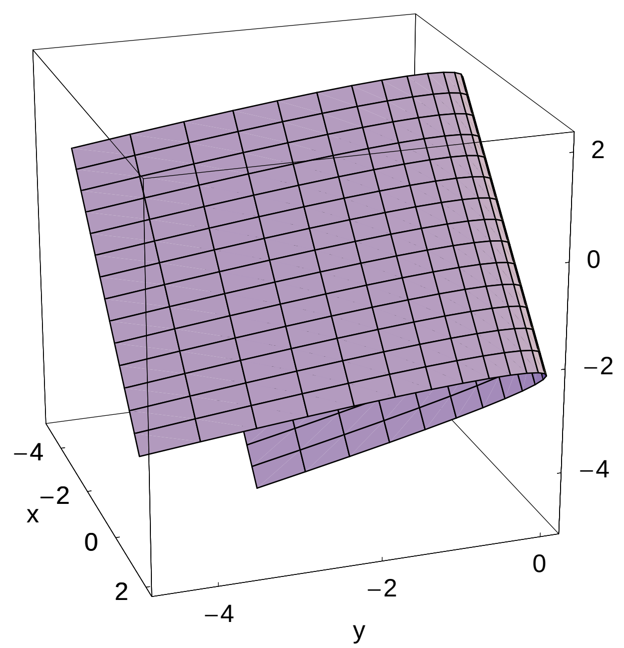
Cvičení 41. $F(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2xz + y^2 - 2yz + z^2 + x + y + z.$

Vlastní čísla: $3, 0, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,0)$.

$$R:\ 9\Big(\xi + \frac{1}{6\sqrt{3}}\Big)^2 = 2\sqrt{6}\Big(\zeta + \frac{1}{24\sqrt{6}}\Big),$$

parabolický válec.





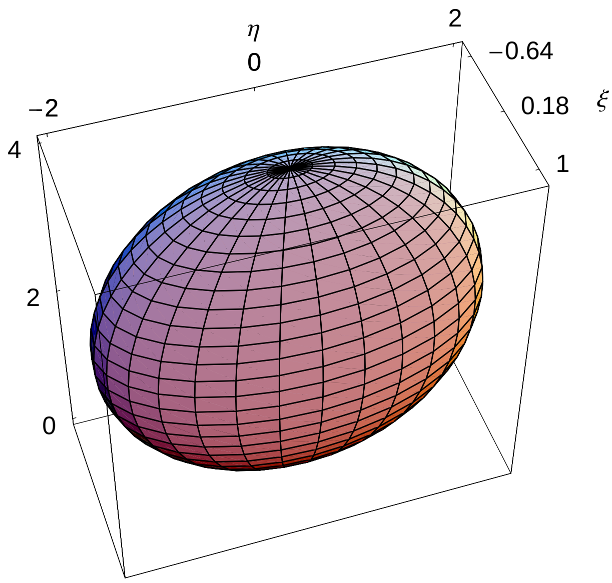
Cvičení 42. $F(x,y,z) = 16\,(x^2 - xy + xz + y^2 - yz + z^2) - 8\sqrt{6}\,(x+y+z) + 1$.

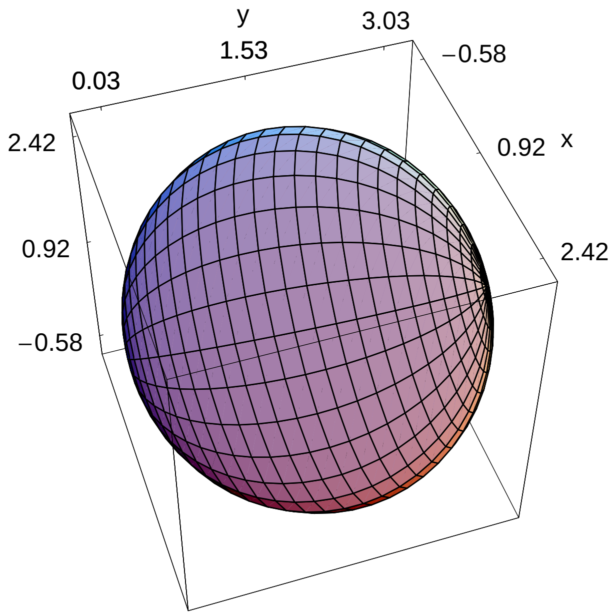
Vlastní čísla: $4, 1, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1,2,1)$.

$$R:\ \left(\xi - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\eta^2 + \tfrac{1}{4}(\zeta - 2)^2 = 1,$$

rotační elipsoid se středem $(1/(4\sqrt{2}), 0, 2) \doteq (0.18, 0, 2)$.

Elipsoid $F(x,y,z) = 0$ má střed $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (3,5,3) \doteq (0.92, 1.53, 0.92)$.





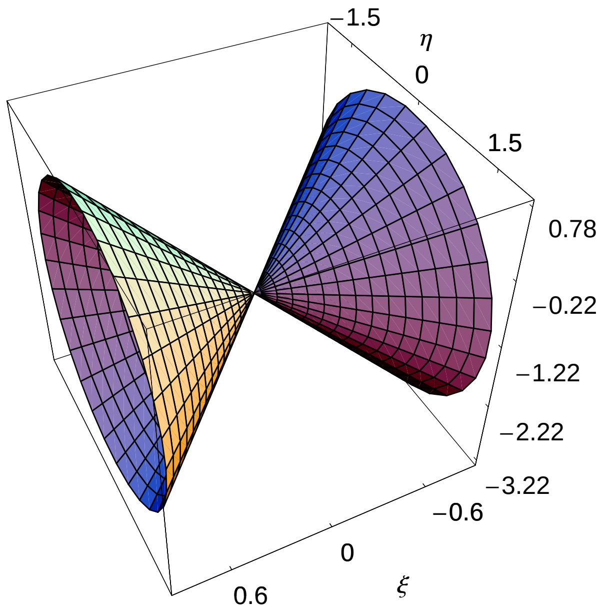
Cvičení 43. $F(x,y,z) = 2\,(x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4yz - x + 2y - z) - 3.$

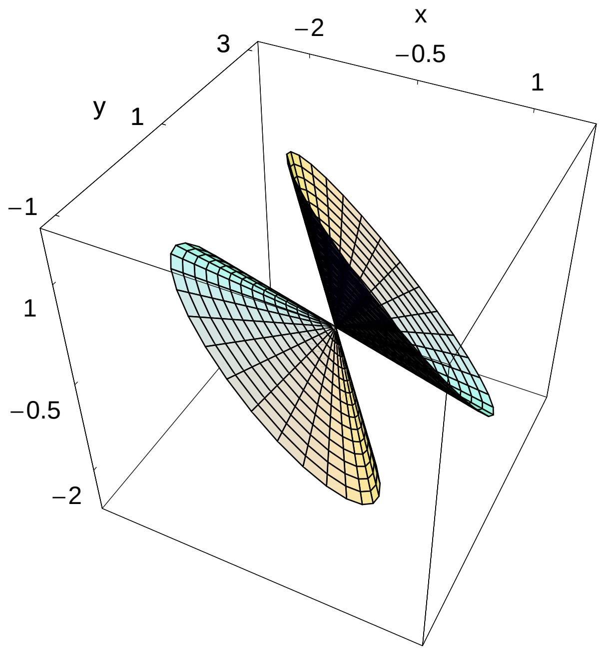
Vlastní čísla: $5, -1, -1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -2, 1)$.

$$R:\ 5\xi^2 = \eta^2 + \left(\zeta + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2,$$

rotační kužel s vrcholem $\left(0, 0, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \doteq (0, 0, -1.22)$.

Kužel $F(x,y,z) = 0$ má vrchol $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, osa kuželu má směr f_1.



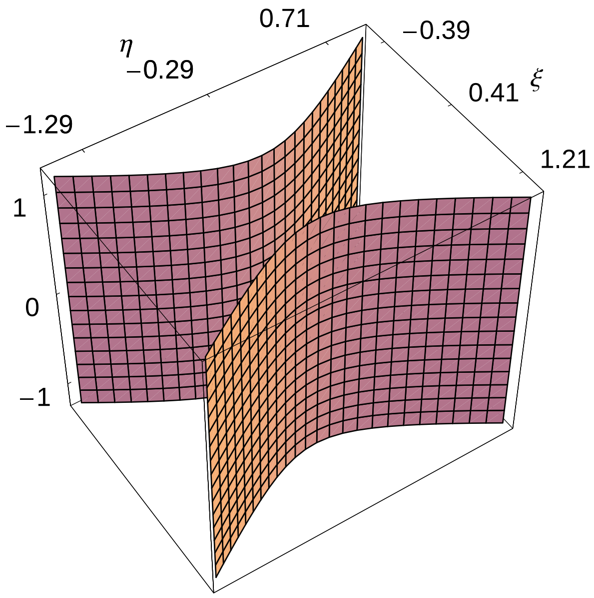


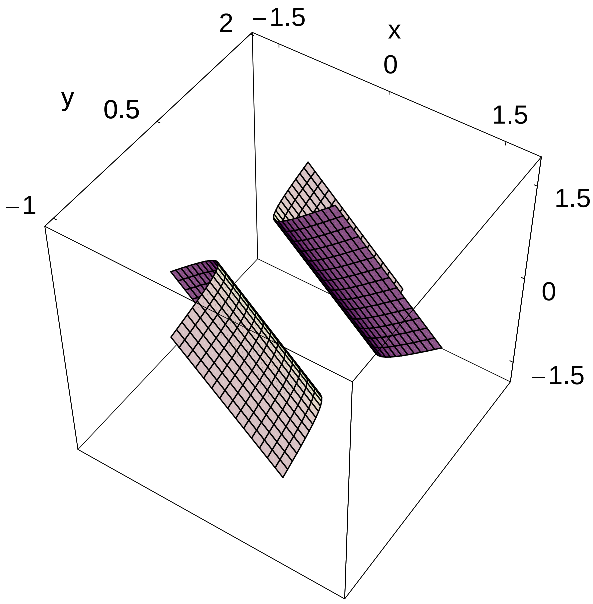
Cvičení 44. $F(x,y,z) = 2xy + y^2 + 2yz - x - y - z.$

Vlastní čísla: $-2, 1, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1, 0, -1)$.

$$R:\ 8\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 4\left(\eta + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1,$$

hyperbolický válec.





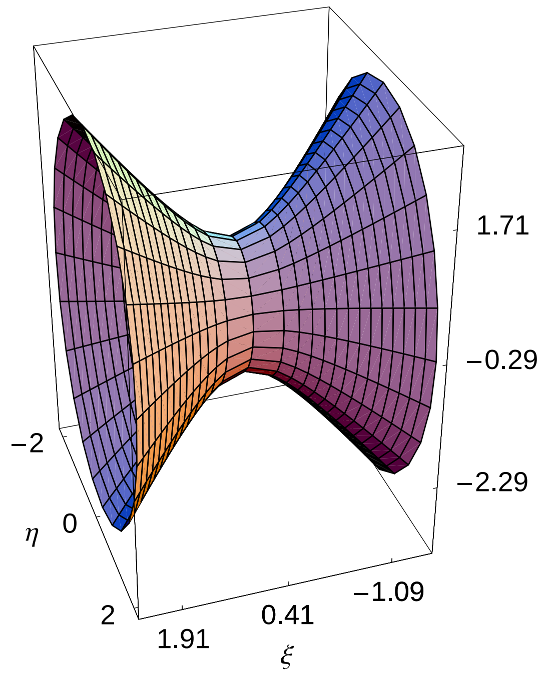
Cvičení 45. $F(x,y,z) = 4(x^2 - 2xy - 2xz - y^2 - 2yz + z^2 + x + y + z) - 5.$

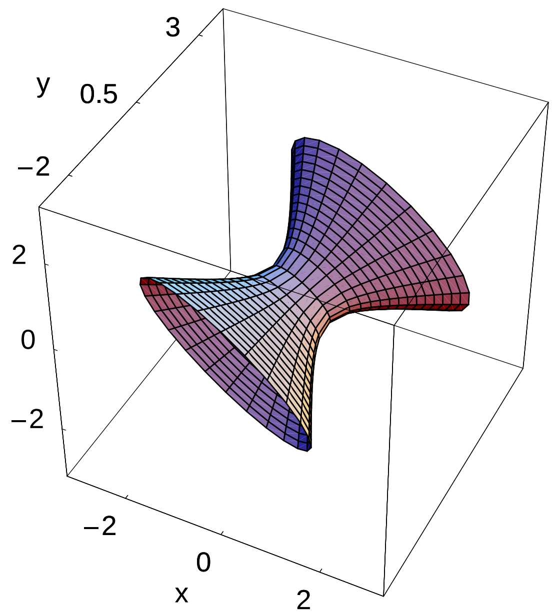
Vlastní čísla: $-2, 2, 1$. Vlastní vektor $f_3 = (1, -1, 1)$.

$$R: \; -2\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 2\eta^2 + \left(\zeta + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1,$$

jednodílný hyperboloid se středem $(1/\sqrt{6}, 0, -1/(2\sqrt{3})) \doteq (0.41, 0, -0.29)$.

Hyperboloid $F(x,y,z) = 0$ má střed $(0, \frac{1}{2}, 0)$.





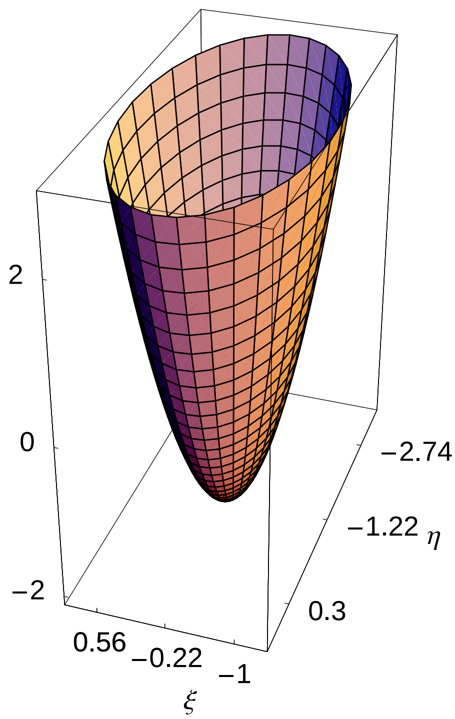
Cvičení 46. $F(x,y,z) = 16\big(x^2+2xy-2xz+y^2-2yz+3z^2+\sqrt{2}(x+2y)\big)-5.$

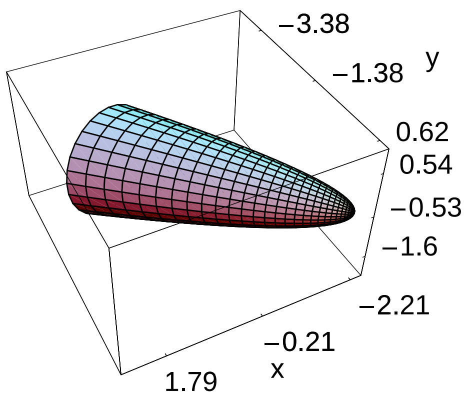
Vlastní čísla: $4, 1, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (1,-1,0)$.

$$R:\ \zeta + 2 = 4\Big(\xi + \frac{\sqrt{3}}{8}\Big)^2 + \Big(\eta + \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)^2,$$

eliptický paraboloid s vrcholem $(-\sqrt{3}/8, -\sqrt{3/2}, -2) \doteq (-0.22, -1.22, -2)$.

Paraboloid $F(x,y,z)=0$ má vrchol $\dfrac{(-25,7,-6)}{8\sqrt{2}} \doteq (-2.21, 0.62, -0.53)$.



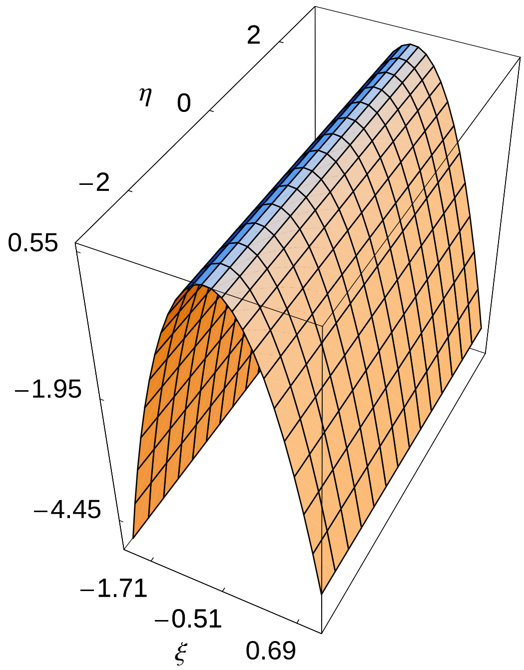


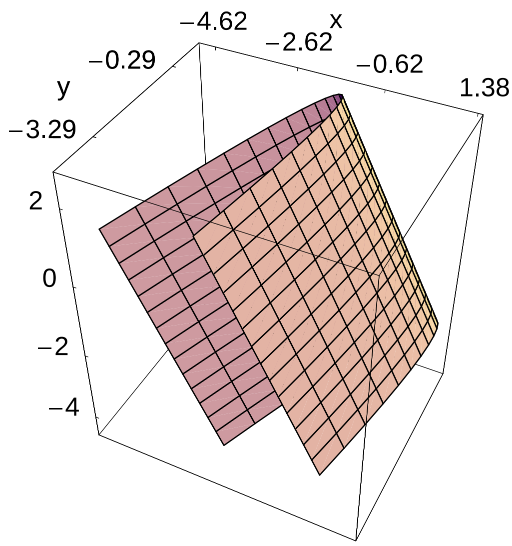
Cvičení 47. $F(x,y,z) = 16\,(4x^2 - 4xy + 4xz + y^2 - 2yz + z^2 + 6x + 3z) + 1.$

Vlastní čísla: $6, 0, 0$. Vlastní vektor $f_3 = (2, 5, 1)$.

$$R: \ \sqrt{\frac{10}{3}}\Big(\zeta - \sqrt{\frac{3}{10}}\Big) = -\Big(\xi + \frac{5}{4\sqrt{6}}\Big)^2,$$

parabolický válec.





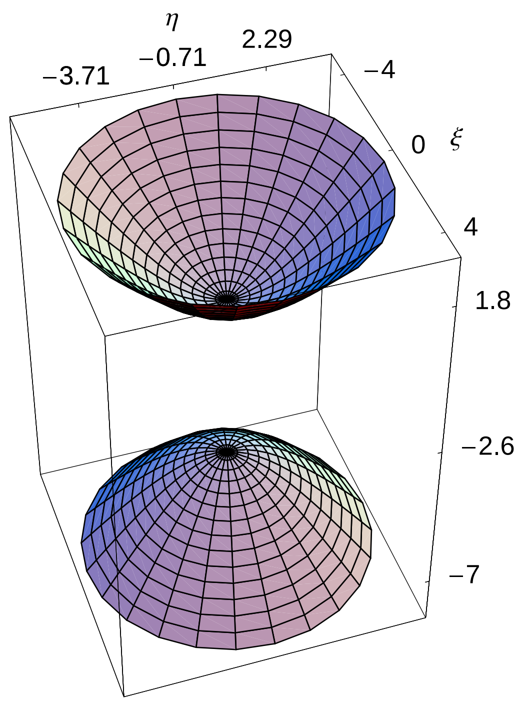
Cvičení 48. $F(x,y,z) = 4(x^2 - 4xy - 4xz + y^2 - 4yz + z^2 - 12x - 6y - 9z) - 3.$

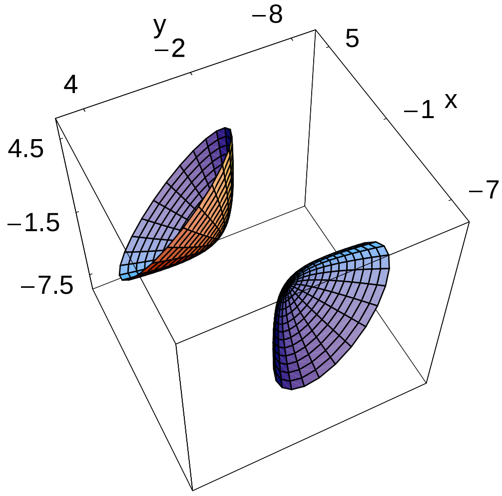
Vlastní čísla: $-3, -3, 3$. Vlastní vektor $f_3 = (1,1,1)$.

$$R: \ \frac{1}{6}\Big(-\xi^2 - \Big(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\zeta + \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big)^2\Big) = 1,$$

dvojdílný hyperboloid se středem $(0, -1/\sqrt{2}, -3\sqrt{3}/2) \doteq (0, -0.71, -2.60)$.

Hyperboloid $F(x,y,z) = 0$ má střed $\big(-1, -2, -\frac{3}{2}\big)$.





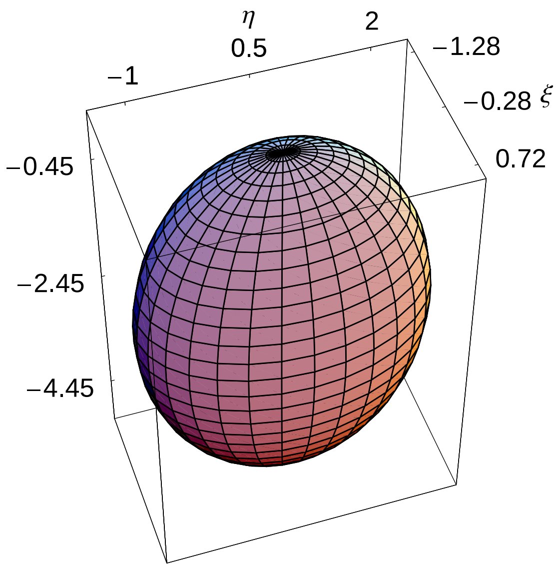
Cvičení 49. $F(x,y,z) = 20\left(x^2 - xy + xz + y^2 - yz + 2z^2 + \sqrt{3}(x+y+z)\right) - 1.$

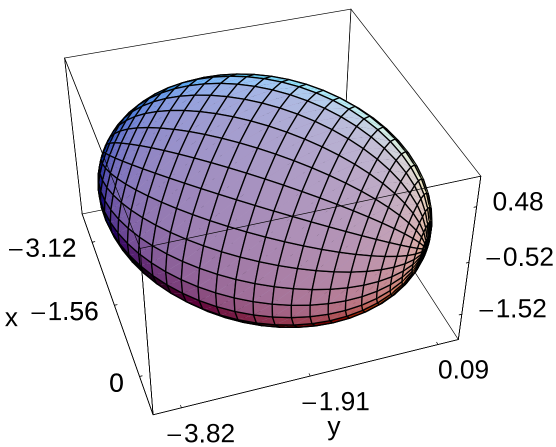
$$\text{Vlastní čísla: } 5, 2, 1. \text{ Vlastní vektor } f_3 = (1,1,0).$$

$$R:\ \frac{5}{7}\left(\xi + \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \frac{2}{7}\left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\zeta + \sqrt{6}\right)^2 = 1,$$

$$\text{elipsoid se středem } (-\sqrt{2}/5, 1/2, -\sqrt{6}) \doteq (-0.28, 0.5, -2.45).$$

$$\text{Elipsoid } F(x,y,z) = 0 \text{ má střed } -\frac{\sqrt{3}}{10}(9, 11, 3) \doteq -(1.56, 1.91, 0.52).$$





Cvičení 50. $F(x,y,z) = 3\,(x^2+y^2+z^2) - 2\,(xy - xz + yz) + 4\,(x + 2\,y + z) + 13.$

Vlastní čísla: $(5,2,2)$. Vlastní vektor $f_3 = (1,2,1)$.

$$R: \; 5\xi^2 + 2\,\eta^2 + 2\,(\zeta + \sqrt{6})^2 + 1 = 0,$$

prázdná množina.

$$\emptyset$$